Hausdorff Dimension, Zufälligkeit und Berechenbarkeit

Jan Reimann

Institut für Informatik, Universität Heidelberg

Hausdorff-Maße

- Caratheodory-Hausdorff Konstruktion auf metrischen Räumen: X metrischer Raum $E \subseteq X$, Metrik d, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, rechtsstetig mit $h(0) = 0$, $\delta > 0$.
- Definiere eine Mengenfunktion

$$\mathcal{H}^h_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_i h(d(U_i)) : E \subseteq \bigcup_i U_i,\ d(U_i) \leq \delta \right\}.$$

- Grenzübergang $\delta \to 0$ liefert ein (äußeres) Maß.
- Das h-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^h$ ist definiert als

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^h_\delta(E)$$

Eigenschaften von Hausdorff-Maßen

- $\mathcal{H}^h$ ist Borel regulär:
  alle Borelmengen B sind messbar, d. h.

  $$(\forall A \subseteq X)\, \mathcal{H}^h(A) = \mathcal{H}^h(A \cap B) + \mathcal{H}^h(A \setminus B),$$

  und für jedes $A \subseteq X$ gibt es eine Borelmenge $B \subseteq A$ mit

  $$\mathcal{H}^h(B) = \mathcal{H}^h(A).$$

- Für $s = 1$, erhält man durch $\mathcal{H}^1$ das übliche Lebesgue Maß λ.

Vom Maß zur Dimension

- Eine naheliegende Wahl von h ist

$$h(x) = x^s$$

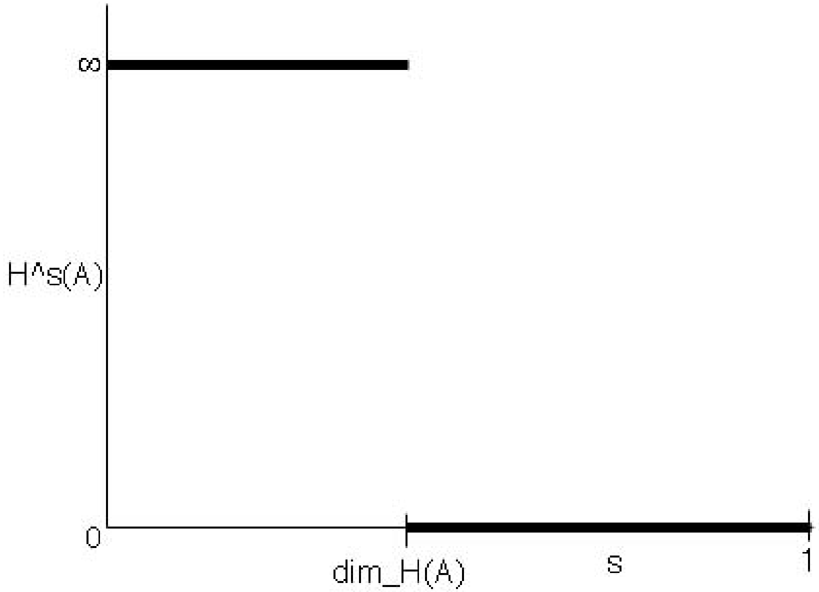
für $s \geq 0$. Wir bezeichnen das zugehörige Hausdorff-Maß mit $\mathcal{H}^s$.

- Wichtige Eigenschaft: Für $0 \leq s < t < \infty$ und $E \subseteq X$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(E) < \infty \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{H}^t(E) = 0, \\ \mathcal{H}^t(E) > 0 \quad &\rightarrow \quad \mathcal{H}^s(E) = \infty. \end{aligned}$$

Hausdorff-Dimension

- Graphische Darstellung:



- Die Hausdorff Dimension einer Menge E ist definiert als

$$\begin{aligned} \dim_H(E) &= \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} \\ &= \sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(E) = \infty\} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Hausdorff-Dimension

- Lebesgue-Maß: Aus $\lambda(E) > 0$ folgt $\dim_H(E) = 1$.
- Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \dim_H(A) \leq \dim_H(B)$.
- Stabilität: Für $A_1, A_2, \dots \subseteq X$ gilt

$$\dim_H\left(\bigcup A_i\right) = \sup\{\dim_H(A_i)\}.$$

(Daraus folgt sofort, dass alle abzählbaren Mengen Dimension 0 haben.)

Eigenschaften der Hausdorff-Dimension

- Geometrische Transformationen: Ist $h : X \to X$ Hölder stetig, d.h. gibt es Konstanten $c, \alpha > 0$ für die gilt, dass

$$(\forall x, y \in X)\ d(x, y) \leq c d(x, y)^{\alpha},$$

dann gilt

$$\dim_H h(E) \leq (1/\alpha) \dim_H(E).$$

- Für $\alpha = 1$ ist h Lipschitz-stetig. Ist h in beide Richtungen Lipschitz, so folgt

$$\dim_H h(E) = \dim_H(E).$$

- Fraktalgeometrie $\triangleq$ Studium von Eigenschaften, die unter Bi-Lipschitz-Abbildungen invariant sind.

Berühmte Beispiele

- Julia-Mengen
- Koch-Schneeflocke
- Cantor-Menge

Hausdorff-Dimension im Cantorraum

- Cantor-Raum: 2^ω. Metrik auf 2^ω ist gegeben durch

$$d(\alpha, \beta) \;=\; 2^{-N} \quad \text{wobei } N = \min\{n : \; \alpha(n) \neq \beta(n)\}.$$

- Zur Bestimmung der Hausdorff-Dimension reicht es aus, Überdeckungen aus offenen Mengen zu betrachten.
- Offene Mengen im Cantor-Raum sind Vereinigungen von Zylindermengen, gegeben durch einen endlichen String $\sigma \in 2^{<\omega}$.

$$[\sigma] := \{\alpha : \; \sigma \sqsubset \alpha\}.$$

Der Durchmesser eines Zylinders ist $d[\sigma] = 2^{|\sigma|}$.

Hausdorff-Dimension im Cantorraum

- Beschreibung von $\mathcal{H}^s$-Nullmengen in 2^ω:
  $A \subseteq 2^\omega$ hat s-dimensionales Hausdorff-Maß 0 g.d.w.

$$(\forall n \in \omega)\ (\exists C_n \subseteq 2^{<\omega})\ A \subseteq \bigcup_{\sigma \in C_n} [\sigma]\ \wedge\ \sum_{\sigma \in C_n} 2^{-|w|s} \leq 2^{-n}.$$

- Effektivisierung: Verlange, dass die C_n effektiv gegeben sind, z.B. als berechenbare Familie rekursiv aufzählbarer Mengen von Strings sind.

Martingale

- Ein (normiertes) Martingal ist eine Funktion $d : 2^{<\omega} \to [0, \infty)$ mit $d(\varepsilon) = 1$ und

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}.$$

- Interpretation: Vermögensfunktion eines fairen Wettspiels gegen eine unendliche Folge von Bits.

Martingale und Hausdorff-Dimension

- Für $s > 0$ heißt ein Martingal d is s-erfolgreich auf α, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d(\alpha\restriction n)}{2^{(1-s)n}} = \infty$$

„Optimales“ Martingal: $d(\alpha\restriction n) = 2^n$ (s-erfolgreich für alle $s \in (0,1]$).
Für $s > 1$ ist die ”passive” Strategie (niemals wetten) auf jeder Folge α s-erfolgreich.

- Theorem.[Lutz; Staiger; Ryabko] $A \subseteq 2^\omega$, d Martingal.
Def. $S^s(d) := \{\alpha \in 2^\omega |\ d\ s\text{-erfolgreich auf } \alpha\}$. Dann gilt

$$\dim_H(A) = \inf\{s : (\exists d)\, A \subseteq S^s(d)\}$$

Dimension und Entropie

- Für $\delta = 2^{-n}$, einfache δ-Überdeckung für A:

$$A^{[n]} := \{\alpha \upharpoonright n : \alpha \in A\}.$$

- Minkowski- oder Box-Counting Dimension:

$$\dim_B(A) := \liminf_{n \to \infty} \frac{\log |A^{[n]}|}{n}.$$

Es gilt: $\dim_H(A) \leq \dim_B(A)$.

- Ist A shift-invariant, so nennt man $\dim_B$ auch topologische Entropie, und für abgeschlossene Mengen A gilt

$$\dim_H(A) = \dim_B(A).$$

Dimension und Entropie

- Für $p \in [0,1]$ bezeichne μ_p das $(p, 1-p)$-Bernoulli-Maß (Produktmaß auf 2^ω mit $P[1] = p$, $P[0] = 1-p$). Die Entropie $H(\mu_p)$ ist definiert als

$$H(\mu_p) = -[p \log p + (1-p) \log(1-p)].$$

- Theorem.[Eggleston] Für $p \in [0,1]$ sei

$$B = \left\{ \alpha \in 2^\omega : \lim_{n \to \infty} \frac{|\{i \leq n : \alpha(i) = 1\}|}{n} = p \right\}.$$

Dann gilt

$$\dim_H B = H(\mu_p).$$

Effektives Hausdorff-Maß

- Führe effektive Übereckungen ein und definiere effektives $\mathcal{H}^s$-Maß 0.
- (Sei $s \geq 0$ rational.) A ist Σ^0_1-$\mathcal{H}^s$-null, Σ^0_1-$\mathcal{H}^s(A) = 0$, wenn es eine berechenbare Folge (C_n) von rek. aufzählbaren Mengen gibt, so dass für alle n,

$$A \subseteq \bigcup_{\sigma \in C_n} [\sigma] \quad \text{and} \quad \sum_{\sigma \in C_n} 2^{-|\sigma|s} \leq 2^{-n}.$$

- Die Definition der effektiven Hausdorff-Dimension (auch Σ_1-Dimension) ergibt direkt:

$$\dim^1_H(A) = \inf\{s \geq 0 : \Sigma^0_1\text{-}\mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Eigenschaften der Effektiven Dimension

- Monotonie bleibt erhalten. Offensichtlich gilt auch $\dim_H A \leq \dim_H^1 A$ für alle $A \subseteq 2^\omega$.
- Zufällige Folgen: Σ_1^0-$\mathcal{H}^1$ entspricht Martin-Löfs effektiven Nullmengen. Eine Folge α, die nicht Σ_1^0-$\mathcal{H}^1$-null ist, heißt Martin-Löf- oder 1-zufällig. Offensichtlich gilt für 1-zufälliges α, $\dim_H^1(\alpha) = 1$.
- Stabilität: [Lutz] $\dim_H^1(A) = \sup_{\xi \in A} \dim_H^1(\xi)$
  Folgt aus der Existenz von maximalen effektiven s-Nulltests, d.h. einer rekursiven Folge von aufzählbaren Mengen $\{U_n^s\}$, für die gilt:

$$A \text{ ist } \Sigma_1^0\text{-}\mathcal{H}^s\text{-null} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \alpha \in A)\ \alpha \in \bigcap_n [U_n^s].$$

Hölder-Transformationen im Cantor-Raum

- Eine Funktion $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ ist monoton, wenn $\sigma \sqsubseteq \tau$ $\varphi(\sigma) \sqsubseteq \varphi(\tau)$ impliziert. Monotone Funktionen definieren stetige Abbildungen $\Phi : 2^\omega \to 2^\omega$.
- Eine monotone Abbildung φ heißt α-expansiv, $\alpha > 0$, wenn für alle β gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|\varphi(\beta\upharpoonright n)|}{n} \geq \alpha.$$

- Theorem: Sei φ α-expansiv. Dann gilt

$$\dim_H^1 \Phi(A) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H^1(A).$$

Algorithmische Entropie

- Kolmogorov-Komplexität: Sei U eine universellle Turing Maschine. Def. für einen beliebigen String σ,

$$C(\sigma) = C_U(\sigma) = \text{min}\{|p| : p \in 2^{<\omega}, U(p) = \sigma\},$$

d.h. $C(\sigma)$ ist die Länge des kürzesten Programms (für U), das σ ausgibt. (Unabhängig (bis auf Konstante) von der Wahl von U.)

- Beschreibung von algorithmischer Zufälligkeit $\rightsquigarrow$ präfix-freie Komplexität K. Präfix-freie Turing-Maschine: keine zwei konvergierenden Programme sind Präfixe voneinander.
- Es gilt: α ML-zufällig $\Leftrightarrow (\exists c)\,(\forall n)\, K(\alpha\restriction n) \geq n - c$.

Kolmogorov-Komplexität und Coding

- Der Definitionsbereich einer präfix-freien Turing-Maschine ist ein präfix-freier Code.
- Kraft-Chaitin Theorem: $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Menge von Strings und $\{l_i, l_2, \ldots\}$ Folge von natürlichen Zahlen ('Längen') mit

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-l_i} \leq 1,$$

so kann man (primitiv rekursiv) eine präfix-freie Maschine M und Strings $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konstruieren, so dass

$$|\tau_i| = l_i \quad \text{und} \quad M(\tau_i) = \sigma_i.$$

Kolmogorov-Komplexität und Coding

- Semimaße: $m : 2^{<\omega} \to [0, \infty)$ mit

$$\sum_{\sigma \in 2^{<\omega}} m(\sigma) \leq 1.$$

- Es existiert ein maximales aufzählbares Semimaß $\widetilde{m}$, d.h. $\widetilde{m}$ ist aufzählbar von unten, und für alle anderen aufzählbaren Semimaße m gilt $m \leq c_m \widetilde{m}$ für eine Konstante c.

- Coding-Theorem: [Zvonkin-Levin]

$$K(\sigma) = -\log \widetilde{m}(\sigma) + c.$$

’Hauptsatz’ der effektiven Dimension

- Theorem: [Ryabko, Staiger, Cai and Hartmanis, Lutz, Tadaki, Mayordomo]
  Für jede Folge $\xi \in 2^\omega$ gilt

$$\dim_H^1(\xi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{K(\xi\restriction n)}{n}.$$

- Ein einfacher Beweis benutzt Semimaße.
- Es spielt für diese Charakterisierung der effektiven Dimension keine Rolle, welche Version der Komplexität man benutzt, da gilt

$$C(\sigma) \leq H(\sigma) \leq C(\sigma) + 2\log C(\sigma).$$

Zwei Beispiele

- Gestreckte Zufälligkeit: ξ ML-zufällig, definiere

$$\widehat{\xi} = \xi(0)0\xi(1)0\xi(2)0\ldots$$

Dann gilt $\mathrm{dim}^1_{\mathrm{H}}(\widehat{\xi}) = 1/2$.

- Egglestons Folgen: μ_p $(p, 1-p)$-Bernoulli-Maß (p rational). Dann gilt für jede μ_p-zufällige Folge

$$\mathrm{dim}^1_{\mathrm{H}}(\xi) = H(\mu_p).$$

Dimension und Zufälligkeit

- Frage: Wie ’zufällig’ sind Folgen positiver Dimension?

Perfekt Teilmengen

- Cantor-Bendixson Theorem: Jede überabzählbare, abgeschlossene Menge $A \subseteq 2^\omega$ enthält eine perfekte Teilmenge, d.h. eine homöomorphe Kopie von 2^ω.
- Gacs, Kucera: Effektive Version – Jede Π^0_1-Menge von positivem Lebesgue-Maß kann effektiv surjektiv auf 2^ω abgebildet werden (durch einen Turing-Prozess).
- Korollar: Jede Folge ist Turing-reduzierbar auf eine ML-zufällige Folge.

Turing-Prozesse

- Ein Turing-Prozess ist eine berechenbare monotone Funktion $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$. Induziert (partielle) Abbildung $\Phi : 2^{\omega} \to 2^{\omega}$.
- Gilt $\Phi(\alpha) = \beta$, für einen Prozess Φ, so folgt $\beta \leq_T \alpha$.

Dimension und perfekte Teilmengen

- Theorem: Jede Π^0_1-Menge A mit Hausdorff-Dimension $> s$ kann surjektiv auf 2^ω abgebildet werden durch einen berechenbaren, s-expansiven Prozess.

Hausdorff- und Wahrscheinlichkeitsmaße

- Wesentlicher Bestandteil des Gacs-Kucera-Beweises: Gilt $\lambda(A) > 2^{-n}$, dann muss es $\alpha, \beta \in 2^\omega$ geben, für die $d(\alpha, \beta) \geq 2^{n-1}$.
- Theorem: Ist A Π^0_1, und enthält A eine ML-zufällige Folge, so kann man effektiv ein $\varepsilon > 0$ angeben, für das $\lambda(A) > \varepsilon$ gilt.
- Benötigt: Berechenbares Maß 'ähnlich' zum uniformen (Lebesgue-) Maß, welches A 'groß' macht.
- Ist $\dim_H(A) > s$, so ist A nicht $\mathcal{H}^s$-null.
- Aber für $0 < s < 1$ ist $\mathcal{H}^s$ kein Wahscheinlichkeitsmaß: $\mathcal{H}^s(2^\omega) = \infty$.

Frostmans Lemma

- Im 'klassischen Fall' existiert solch ein Maß, wenn A Borel ist.
- Frostman's Lemma: Sei $B \subseteq 2^\omega$ Borel. Dann gilt $\mathcal{H}^s(B) > 0$ g.d.w. es ein Radon Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit kompaktem Träger gibt, der in B enthalten ist, und so dass gilt

$$(\forall \sigma \in 2^{<\omega})\ [\mu[\sigma] \leq 2^{-|\sigma| s}].$$

Eine effektive Version

- Für Π^0_1-Mengen kann Frostmans Lemma effektivisiert werden.
- Theorem: Sei $A \subseteq 2^\omega$ Π^0_1. Dann gilt $\mathcal{H}^s(A) > 0$ g.d.w. es ein berechenbares Wahrscheinlichkeitsmaß μ gibt mit $\mu(B) > 0$ und

$$(\forall \sigma \in 2^{<\omega})\ [\mu[\sigma] \leq 2^{-|\sigma|s}].$$

Konstruktion

- $T \subseteq 2^{<\omega}$ rekursiver Baum mit $[T] = A$.
- Def. eine Folge berechenbarer Maße $\{\mu^n\}$. Jedes μ^n ist eine Approximation von μ, kennt man nur die Pfade von T bis zur Länge n.
- Für $n \in \mathbb{N}$, def. μ_n^n derart, dass für alle σ der Länge n gilt:

$$\mu_n^n \upharpoonright [\sigma] = \begin{cases} 2^{(1-s)n} \lambda \upharpoonright [\sigma], & \text{falls } \sigma \in T, \\ 0, & \text{falls } \sigma \notin T. \end{cases}$$

Konstruktion

- Modifiziere μ_n^n nach unten um $\mu[\sigma] \leq 2^{-|\sigma|s}$ in allen Leveln $\leq n$ sicherzustellen. Def. μ_{n-1}^n über die Bedingung

$$\mu_{n-k-1}^n \upharpoonright [\sigma] = \gamma(\sigma)\mu_{n-k}^n \upharpoonright [\sigma]$$

  wobei $\gamma(\sigma) = \min\{1, 2^{-(n-k-1)s}(\mu_{n-k}^n[\sigma])^{-1}\}$.

- Stoppe, sobald $[T] \subseteq [\sigma]$ für ein σ der Länge k_0 und def. $\mu^n = \mu_{k_0}^n$. k_0 ist offensichtlich berechenbar, somit auch μ^n, da alle μ_m^n berechenbar sind.
- Setze $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\mu^n(2^\omega))^{-1}\mu^n$.

Dimension und Zufälligkeit

- Theorem legt Frage nahe: Ist jede Folge positiver Dimension zufällig bezüglich eines berechenbaren W.Maßes?
- Anwendung: Effektive Dimension von Turing-Kegeln.
- Problem: Gibt es Turing-untere-Kegel (Grade) von nicht-ganzzahliger Dimension?
- Theorem: [Levin]
  Jede Folge, die zufällig ist bzgl. eines berechenbaren W.Maßes ist Turing äquivalent zu einer Martin-Löf-zufälligen Folge.
- Somit würde eine positive Antwort auf die erste Frage die Existenz von unteren Kegeln nicht-ganzzahliger Dimension ausschließen.

Improper Sequences

- Eine Folge heißt unnatürlich [Levin-Zvonkin], wenn sie bzgl. keines berech. Maßes zufällig ist.
- Klassische Resultate: Es gibt eine universelle Nullmenge $Z \subseteq 2^\omega$, eine Teilmenge von 2^ω die kein nicht-atomares endliches Borel Maß 'trägt', die zudem positive Hausdorff Dimension hat. [Grzegorek, Fremlin, Zindulka]
- Theorem: [Muchnik] Jede 1-generische Folge ist unnatürlich.
- Theorem: Es gibt eine unnat. Folge der Dimension 1.
- Der Beweis benutzt die Technik des schwachen Lipschitz-Join

Wieviel Zufälligkeit?

- Für stärkere Reduzierbarkeiten (bis $\mathtt{tt}$), gibt es untere Kegel nicht-ganzzahliger Dimension. [Ambos-Spies-Merkle-Reimann-Stefan, Reimann-Slaman]
- Für Turing-Reduzierbarkeit ist das Problem noch offen.
- Mögliche Lösung: Effektive Version der Kapazität.