Topologische Spiele und resourcenbeschränkte Baire-Kategorie

Diplomarbeit von Jan Reimann

14. Januar 2005

Betreuer: Prof. Dr. Klaus Ambos-Spies

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 288
69117 Heidelberg

Danksagung

Ich danke Herrn Professor Ambos-Spies für eine geduldige Betreuung.
Alexander Teutsch danke ich für gewissenhafte Durchsicht und hilfreiche Korrekturen.
Meiner Mutter danke ich für vieles Andere.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Konzept der Baire-Kategorie auf topologischen Räumen erlaubt eine Unterscheidung zwischen mageren ("kleinen") und comageren ("großen") Mengen, wobei die mageren Mengen ein σ-Ideal bilden. Ist der zugrundeliegende topologische Raum ein Bairescher Raum (jede comagere Menge ist dicht, d.h. insbesondere nichtleer), so ist gewährleistet, daß dieses Ideal nicht trivial ist.

Banach-Mazur-Spiele ermöglichen eine spieltheoretische Charakterisierung der Baire-Kategorie auf topologischen Räumen. Zwei Spieler wählen dabei abwechselnd ineinandergeschachtelte, nichtleere offene Mengen. Spieler I gewinnt, falls der unendliche Durchschnitt dieser Mengen mindestens einen gemeinsamen Punkt mit einer vorgegebenen Menge A hat. Andernfalls siegt Spieler II. Ein Ergebnis von Banach und Mazur besagt, daß dann und nur dann eine Gewinnstrategie für Spieler II existiert, wenn die Menge A mager (von 1. Kategorie) ist.

Auf dem Cantorraum 2^ω lassen die Begriffe der Baire-Kategorie einfach und elegant durch *endliche Erweiterungsfunktionen* beschreiben. Für Anwendungen in der Berechenbarkeits- oder Komplexitätstheorie besitzt die klassische Baire-Kategorie jedoch einen entscheidenden Nachteil: Abzählbare Mengen sind mager. Folglich ist die Baire-Kategorie zu grob, um subrekursive Strukturen zu klassifizieren. Dies führte zur Entwicklung der *resourcenbeschränkten Baire-Kategorie*. Hierbei besitzt eine Menge nur dann die Eigenschaft mager zu sein, wenn sie mager im klassischen Sinn ist und sich dies durch eine Erweiterungsfunktion bezeugen läßt, die sich innerhalb bestimmter Resourcenschranken berechnen läßt. Resourcenbeschränkte Kategorie relativiert also die klassische Baire-Kategorie bezüglich gegebener Resourcenschranken. Wesentliche Ergebnisse in diesem Bereich wurden von Mehlhorn, Lisagor, Lutz und Fenner erzielt. Auch das Banach-Mazur-Spiel läßt sich dahingehend modifizieren, daß eine Charakterisierung der neuen Kategorienkonzepte via *resourcenbeschränkter Banach-Mazur-Spiele* möglich ist. Die wesentliche Änderung gegenüber dem ursprünglichen Spielmodell besteht darin, daß Spieler II nun bei der Wahl einer Strategie auf die vorgegebene Resourcenschranke achten muß, während Spieler I weiterhin völlige Freiheit diesbezüglich genießt.

Ambos-Spies führte ein erweitertes resourcenbeschränktes Kategorienkonzept ein, das die Zahl der Mengen, die mager im klassischen, aber nicht mager im resourcenbeschränkten Sinn sind, verringert, trotzdem aber noch sinnvolle Klassifizierungen subrekursiver Objekte ermöglicht. Der wesentliche Unterschied zu den bis dahin bekannten Kategorienkonzepten liegt darin, daß nun auch partielle Erweiterungsfunktionen die Magerheit von Objekten bezeugen dürfen. Im Gegensatz zu den anderen resourcenbeschränkten Konzepten ist eine spieltheoretische Beschreibung durch einfache Anpassung des Banach-Mazur-Spiels an die Resourcenschranke nicht mehr möglich. Vielmehr ist es notwendig, einen neuen Spieltyp zu definieren, der das klassische Banach-Mazur-Spiel erweitert. So kann Spieler II nun unter bestimmten Voraussetzungen Züge seines Gegners kürzen. Um ihm dadurch nicht zu große Kontrolle über das Spiel zu geben, werden diese Kürzungen durch einen besonderen Mechanismus kontrolliert.

In Abschnitt 2 werden zunächst die topologischen Grundlagen entwickelt, um danach das Konzept der Baireschen Kategorie einzuführen. Abschnitt 3 widmet sich den topologischen Spielen. Hier wird insbesondere das Spiel von Banach-Mazur in seiner allgemeinsten Form vorgestellt. In Abschnitt 4 werden die in den beiden vorausgegangenen Abschnitten behandelten Konzepte für den Speziallfall des Cantorraums als zugrunde liegendem topologischem Raum behandelt. Abschnitt 5 bietet einen Überblick über die verschiedenen resourcenbeschränkten Kategorienkonzepte. Für die Konzepte von Mehlhorn, Lutz und Fenner wird eine spieltheoretische Beschreibung via resourcenbeschränkter Banach-Mazur-Spiele gegeben. Die spieltheoretische Charakterisierung für das erweiterte Kategorienkonzept von Ambos-Spies findet ist dem Abschnitt 6 vorbehalten. Dort wird die modifizierte Version des Spiels von Banach-Mazur ausführlich diskutiert.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen noch einige Notationsfragen geklärt werden:

ω bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen, $2^{<\omega}$ die Menge aller (endlichen) binären Strings, und 2^{ω} ist die Menge aller unendlichen Binärfolgen. Kleine Buchstaben $\ldots, v, w, x, y, z$ vom Ende des Alphabets bezeichnen Strings, wohingegen alle anderen Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen, mit Ausnahme von f, g, h die für Funktionen reserviert sind. (Manchmal wird auch l für Funktionen benutzt.) Die griechischen Buchstaben ϕ und ψ stehen für Strategien in Spielen. Große Buchstaben vom Anfang des Alphabets bezeichnen Elemente von 2^{ω}, S und T sind für Teilmengen von $2^{<\omega}$ reserviert. Fettgedruckte Buchstaben (insbesondere $\mathbf{C}$) stehen für Teilmengen von 2^{ω}.

Für einen String x bezeichnet $x(m)$ das $(m+1)$-te Bit von x (0 oder 1), d.h. $x = x(0) \ldots x(n-1)$, wobei $n = |x|$ die Länge von x ist. Ist $m \geq |x|$, so gilt $x(m) \uparrow$. λ steht für den leeren String. Das Anfangsstück der Länge n eines Strings wird mit $x \restriction n = x(0) \ldots x(n-1)$ bezeichnet.

Sind x und y Strings, so ist $x\hat{\ }y$ die Konkatenation von x und y, also $x\hat{\ }y = x(0) \ldots x(m-1)y(0) \ldots y(n-1)$, mit $m = |x|$, $n = |y|$. y *erweitert* x, symbolisch $x \sqsubseteq y$, falls $|y| \geq |x|$ und $y \restriction |x| = x$. Die Erweiterung ist *echt*, ausgedrückt durch $x \sqsubset y$, wenn y x erweitert und $|y| > |x|$. Zwei Strings x und y heißen *kompatibel*, wenn x y oder y x erweitert. Anderfalls sind sie *inkompatibel*, in Zeichen $x \parallel y$. Gilt $x \sqsubseteq y$, so ist $y - x = y(|x|)\dots y(|y|-1)$. Die Notation für Strings wird kanonisch auf unendliche Binärfolgen erweitert. So gilt z.B. $x \sqsubseteq A$, wenn $A \upharpoonright |x| = x$. Für $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ gilt $x \sqsubset \mathbf{C}$, wenn es ein $A \in \mathbf{C}$ gibt, so daß $x \sqsubset A$. Dieser Formalismus wird, soweit möglich, auch für $X^{<\omega}$ und X^ω bei beliebigem X benutzt.

Die wesentlichen Begriffe und Konzepte der Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie werden als bekannt vorausgsetzt. (Als Referenz können hier [Odi89], [Soa87] und [BDG95] dienen.) Insbesondere die Klassen **REC** der rekursiven Mengen und **P** werden benutzt. Dabei ist $A \in \mathbf{P}$, wenn es eine deterministische Turing-Maschine M gibt, die charakteristische Funktion von A berechnet, und die Laufzeit von M für Eingabe n durch $f(|n|)$ begrenzt ist, wobei $|n|$ die Länge der Binärdarstellung von n und f ein Polynom ist. Für die Berechenbarkeit von Funktionen gilt entsprechendes.

Desweiteren wird von einer Standard-Paarungsfunktion $\langle .,. \rangle : 2^{<\omega} \times 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ Gebrauch gemacht, die bijektiv, berechenbar und invertierbar in polynomieller Zeit ist. Ist f eine Funktion mit Definitionsbereich in $2^{<\omega}$ und k eine natürliche Zahl, so bezeichnet $f_k(x) \overset{df}{=} f(\langle 0^k, x \rangle)$ für alle $x \in 2^{<\omega}$.

2 Baire-Kategorie

2.1 Große und kleine Mengen

In der mathematischen Tradition existieren im Wesentlichen drei Ansätze, in einem gegebenen System von Mengen zwischen großen und kleinen Objekten zu unterscheiden. Diese Ansätze besitzen einige gemeinsame Merkmale, die sicherstellen, daß diese Konzepte eine sinnvolle Klassifizierung ermöglichen:

1. Keine Menge ist sowohl *klein* als auch *groß*.
2. Das Komplement einer *kleinen* Menge ist *groß* (und umgekehrt).
3. Jede Teilmenge einer *kleinen* Menge ist ebenfalls *klein*. (Jede Obermenge einer *großen* Menge ist *groß*.)

Es wird nicht gefordert, daß jede Menge entweder groß oder klein ist, d.h. es können durchaus *mittlere* Mengen existieren. Eine weitere Eigenschaft, die nicht so unmittelbar naheliegend ist wie die obigen drei, der aber dennoch einige Bedeutung zukommt, ist die sogenannte *Idealeigenschaft*.

Definition 2.1 *Ein System $\mathcal{I}$ von Teilmengen eines Mengensystems $\mathcal{X}$ heißt **Ideal**, falls $\mathcal{I}$ unter Teilmengen und endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist. $\mathcal{I}$ ist ein **σ-Ideal**, wenn $\mathcal{I}$ auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist.*

Im folgenden werden die Konzepte aus Mengenlehre und Maßtheorie kurz skizziert, eine ausführliche Vorstellung der Baire-Kategorie, die sich auf topologische Strukturen stützt, schließt sich an.

Mengenlehre

Das wohl einfachste und bekannteste Klassifikationssystem geht auf Georg Cantor [Can83] zurück. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls sie zur Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist, sie heißt *höchstens abzählbar*, wenn sie entweder endlich oder abzählbar ist, d.h. wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to \omega$ gibt. Eine Menge ist *überabzählbar*, wenn sie nicht höchstens abzählbar ist.

Die Unterscheidung zwischen höchstens abzählbaren Mengen und Mengen, deren Komplement höchstens abzählbar ist, liefert eine Klassifikation mit den oben genannten Merkmalen. Die höchstens abzählbaren Mengen bilden ein σ-Ideal, da die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wiederum abzählbar ist.

Maßtheorie

Eine andere Möglichkeit, um die Größe eines Objektes zu beschreiben, besteht darin, sein *Volumen* zu definieren.

Das **Lebesgue-Maß** (Lebesgue [Leb04]) benutzt dabei als Ausgangspunkt Objekte, deren Volumen sich einfach angeben läßt, z.B. n-dimensionale Quader. In zwei getrennten Vorgängen werden dann das *äußere* sowie das *innere Maß* gebildet. Beim äußeren Maß wird das zu „messende" Objekt so gut wie möglich in die bereits bekannten Basisobjekte „eingepackt".

$$m^*(A) = \inf\{\sum V(B_i) : A \subset \bigcup B_i\}$$

wobei die B_i für bereits meßbare Basisobjekte stehen. Umgekehrt wird bei der Ermittlung des inneren Maßes ein Gegenstand „ausgeschöpft":

$$m_*(A) = \sup\{\sum V(B_i) : A \supset \bigcup B_i\}$$

Eine Menge A heißt **lebesgue-meßbar**, falls gilt:

$$m^*(A) = m_*(A)\ (= m(A))$$

Nun läßt sich ein Klassifikationssystem ableiten:
Eine Menge A gilt als *klein*, falls $m(A) = 0$ gilt. (A ist eine *Nullmenge*.) *Große* Mengen sind solche, deren Komplement eine Nullmenge ist.

Daß dieses Klassifikationskonzept die Idealeigenschaft besitzt, ist nicht so offensichtlich wie im Fall der abzählbaren Mengen. Auf die entsprechenden Beweise wird hier verzichtet, sie finden sich z.B. in [Oxt80].

Das Lebesgue-Maß ist ein sehr mächtiges Werkzeug, das - in seiner resourcen-beschränkten Version - seit einigen Jahren auch in der Komplexitätstheorie verstärkt Einsatz findet. Näheres hierzu findet sich z.B. in [Lut90] und [May94b].

2.2 Baire-Kategorie in topologischen Räumen

1899 entwickelte Rene Baire [Bai99]ein Klassifikationskonzept, das auf den topologischen Merkmalen einer Menge fußt. Ausgangspunkt der Überlegungen Baires war die Tatsache, daß eine *kleine* Menge sich in der gegebenen Obermenge regelrecht "dünn macht". Um dies mathematisch exakt zu formulieren, müssen die zu klassifizierenden Objekte mit einer geeigneten Struktur versehen sein. Eine solche Struktur stellt die Theorie der *topologischen Räume* zur Verfügung.

Topologische Räume

Definition 2.2 *Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, bestehend aus einer Menge X sowie einer Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, für die gilt:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen.

(iii) $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten.

Solch eine Familie $\mathcal{T}$ heißt **Topologie** auf X. Ihre Elemente sind die **offenen Mengen**, ihre Komplemente heißen **abgeschlossen**. (Ist es klar, welche Topologie gemeint ist, so wird auf einen Topologischen Raum lediglich unter Angabe der Menge X Bezug genommen.)

Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X heißt **dicht**, falls ihr Komplement keine offene, nichtleere Menge enthält.

Nirgends dichte, magere und comagere Mengen

Die zentralen Konzepte zur topologischen Klassifizierung von kleinen und großen Teilmengen eines topologischen Raumes werden nun vorgestellt. Die zentrale Idee hierbei ist, daß jede offene Menge als lokal dichtes Gebilde angesehen werden kann. Als *klein* werden dann solche Mengen angesehen, die in keinem Punkt auch nur annähernd eine offene Menge beschreiben, Mengen, die „voller Löcher sind“ (*Oxtoby*).

Bei der Definition ist darauf zu achten, daß die oben angedeutete *Idealeigenschaft* erfüllt ist.

Definition 2.3 *Sei A eine Teilmenge eines topologischen Raums X.*

*(a) A heißt **nirgends dicht**, falls $A^{\complement}$ eine offene und dichte Menge enthält.*

*(b) A heißt **mager**, falls A die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist.*

*(c) A heißt **comager**, falls $A^{\complement}$ mager ist.*

Man beachte (am Beispiel der rationalen Zahlen), daß eine magere Menge dicht sein kann.

Proposition 2.4 *Die nirgends dichten Teilmengen eines topologischen Raumes bilden ein Ideal. Die mageren Teilmengen bilden ein σ-Ideal.*

Beweis. Eine Teilmenge B einer nirgends dichten Menge A ist sicherlich nirgends dicht, da $A^{\complement}$ eine Teilmenge von $B^{\complement}$ ist. Sind A und B zwei nirgends dichte Mengen, so enthalten $A^{\complement}$ und $B^{\complement}$ jeweils eine offene und dichte Menge U bzw. V. Wäre $U \cap V$ nicht offen dicht, so enthielte $(U \cap V)^{\complement} = U^{\complement} \cap V^{\complement}$ eine offene Menge W. Dies stünde aber im Widerspruch dazu, daß sowohl $U^{\complement}$ als auch $V^{\complement}$ nirgends dichte Mengen sind.

Daß die mageren Mengen ein σ-Ideal bilden, folgt sofort aus der Definition sowie der Tatsache, daß eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Indexmengen wieder abzählbar ist. □

Bairesche Räume

Um die Baire-Kategorie in dem oben beschriebenen Sinne als Klassifikationswerkzeug anwenden zu können, muß sichergestellt sein, daß magere Mengen auch wirklich klein, und comagere Mengen auch wirklich groß sind. Das heißt, comagere Mengen sollen insbesondere nicht leer sein, oder - äquivalent - der topologische Raum X selbst darf nicht mager sein. Die folgende (einfache) Beobachtung präsentiert drei gleichwertige Charakterisierungen dieser „Gutartigkeit“.

Proposition 2.5 *Sei X ein topologischer Raum. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Jede nichtleere offene Menge in X ist nicht-mager.

(ii) Jede comagere Menge in X ist dicht.

(iii) Der Durchschnitt abzählbar vieler offener, dichter Mengen in X ist dicht.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $A \subseteq X$ eine comagere Menge. Angenommen, A wäre nicht dicht, $A^{\complement}$ enthielte also eine nichtleere offene Menge U. Nach (i) wäre dann aber $U \subseteq A^{\complement}$ nicht-mager, im Widerspruch zur Idealeigenschaft der mageren Mengen.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Folgt sofort aus der Definition von mageren und comageren Mengen.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Angenommen, $U \subseteq X, U \neq \emptyset$ ist offen und mager. Dann ist U als Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen darstellbar, folglich im Komplement des Durchschnitts abzählbar vieler offener, dichter Mengen enthalten. Nach Voraussetzung ist letzterer dicht, somit existiert eine offene nichtleere Menge im Komplement einer dichten Menge - Widerspruch! □

Definition 2.6 *Ein topologischer Raum X heißt* ***Bairescher Raum****, falls er die Bedingungen in Proposition 2.5 erfüllt.*

Bairesche Räume garantieren eine sinnvolle Unterscheidung zwischen großen und kleinen Mengen. Deshalb ist es wichtig, daß man von einem Mengensystem, auf das man die Begriffe der Baire-Kategorie anwenden will, zunächst zeigt, daß es sich hierbei um einen Baireschen Raum handelt.

3 Topologische Spiele

Die Spieltheorie ist eine eigenständige mathematische Disziplin, die in vielen, auch empirisch arbeitenden Wissenschaften Anwendung findet. Vor allem Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler sehen in den Methoden der Spieltheorie geeignete Werkzeuge zur Modellierung gesellschaftlicher Prozesse, wie etwa marktwirtschaftlicher Dynamiken oder militärischer Konfliktsituationen.

In der Mathematik selbst wird der abstrakte Spielbegriff häufig dazu benutzt, Theorien und Resultate zu reformulieren und so in anderem Licht erscheinen zu lassen. Oft gelingt es dabei, Ergebnisse, die ursprünglich komplizierter und aufwendiger Beweise bedurften, in eleganter Weise neu zu präsentieren. Im günstigsten Fall eröffnen die spieltheoretischen Methoden die Einsicht in neue, nichttriviale Zusammenhänge.

Neben den Gebieten Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik erfährt die Spieltheorie auch in Teilen der Logik, der Mengenlehre und der Topologie Verwendung. Letztere ist Gegenstand dieses Abschnitts, wobei besonders ein Spieltyp herausgestellt werden soll. Doch zunächst ist es erforderlich, daß zumindest die wichtigsten Begriffe der mathematischen Spieltheorie eingeführt werden, nicht zuletzt, um eine adäquate Form für die im weiteren Verlauf behandelten Spiele zu entwickeln.

3.1 Unendliche Zwei-Personen-Spiele

Der Spielbegriff, wie er in der mathematischen Spieltheorie verwendet wird (siehe [vNM44]), ist aufgrund der Vielzahl vorstellbarer Spieltypen sehr abstrakt gehalten. An dieser Stelle soll, um die Darstellung des Stoffes nicht unnötig zu komplizieren, auf die Einführung des allgemeinen Spielbegriffs verzichtet werden. (Es sei auf die einschlägige Literatur, wie z.B. [vNM44] verwiesen.) Statt dessen beschränkt sich dieser spieltheoretische Abschnitt auf die Darstellung der *unendlichen Zwei-Personen-Spiele*, da alle hier behandelten Spiele Spezialfälle eines solchen Spieles sind.

Der einfachste Typ eines **unendlichen Zwei-Personen-Spiels mit perfekter Information**[1] (im folgenden auch einfach *unendliches Spiel* genannt) läßt sich recht einfach beschreiben: Gegeben sei eine nichtleere Menge X, die *Auswahlmenge*, sowie eine Teilmenge $A \subseteq X^\omega$, die *Gewinnmenge*. Im Verlauf einer *Partie*[2] wählen die Spieler dann abwechselnd Elemente aus X:

[1] Der Zusatz *mit perfekter Information* rührt daher, daß zu jedem Zeitpunkt einer Partie jedem Spieler sämtliche bisher getätigten Züge bekannt sind. In vielen gewöhnlichen Spielen, z.B. beim *Drücken* während einer Skatpartie, ist das nicht der Fall.

[2] Im gemeinen Sprachgebrauch wird das Wort “Spiel” oft sowohl für die allgemeine

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & x_0 & & x_2 & & \\ & & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & x_1 & & x_3 & \end{array}$$

Spieler I beginnt und spielt $x_0 \in X$. Daraufhin setzt Spieler II mit $x_1 \in X$ fort, worauf Spieler I wieder an der Reihe ist und $x_2 \in X$ wählt usw. Aus den Zügen der Spieler bildet sich so eine Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ in X^ω. Spieler I gewinnt, falls $(x_n) \in A$. Anderfalls siegt Spieler II. Diese grundlegende Variante eines unendlichen Zwei-Personen-Spiels wird mit $G(X, A)$ bezeichnet, oder einfach nur $G(A)$, falls klar ist, welche Auswahlmenge X benutzt wird.

Für die Beschreibung von Spielen sind *Bäume* äußerst nützlich.

Definition 3.1 *Ein* ***Baum*** *auf einer Menge X ist eine Teilmenge $T \subseteq X^{<\omega}$, die unter Anfangsstücken abgeschlossen ist, d.h. aus $t \in T$ und $s \sqsubseteq t$ folgt $s \in T$. Der* ***Stamm*** *eines Baumes T ist die Menge seiner unendlichen Zweige:*

$$[T] = \{A \in X^\omega : \forall n(A \restriction n \in T)\}$$

Alle möglichen Partieverläufe eines Spiels lassen sich in einem Baum T_G zusammenfassen. Dieser Baum stellt das Spiel in seiner Gesamtheit dar. Für ein einfaches unendliches Spiel $G(X, A)$ gilt natürlich $T_G = X^{<\omega}$. Oftmals ist es jedoch wünschenswert, daß die beiden Spieler ihre Auswahl aus der Menge X nicht beliebig treffen können, sondern sich zusätzlich an bestimmte Regeln halten müssen. Dies bedeutet, daß nicht mehr jeder (unendliche) Pfad in X^ω einen regelgemäßen Partieverlauf darstellt. Der Spielbaum T_G ist in diesem Fall eine (echte) Teilmenge von $X^{<\omega}$. Der Ablauf einer Partie

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & x_0 & & x_2 & & \\ & & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & x_1 & & x_3 & \end{array}$$

ist nun bestimmt durch die Regel, daß $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in T_G$ gelten muß für alle $n \geq 0$. Das Resultat einer Partie ist ein Element von $[T_G]$.

T_G^I bezeichne die Elemente $t \in T_G$ mit gerader Länge, also diejenigen Situationen, in denen Spieler I am Zug ist. Entsprechend ist $T_G^{II} = \{t \in T : \mathrm{len}(t) \text{ ungerade}\}$ die Menge der Spielsituationen, in denen Spieler II ziehen muß.

Bei der Gestaltung von Partien spielen *Strategien* eine wichtige Rolle.

Beschreibung eines Spiels als *Gesamtheit seiner Regeln* (z.B. das Schach*spiel*), als auch zur Bezugnahme auf dessen konkrete Durchführung ("Dieses Spiel hast Du verloren!") gebraucht. Um Mehrdeutigkeiten aus dem Weg zu gehen, wird letzteres als *Partie* bezeichnet.

Eine Strategie legt für einen Spieler sämtliche Züge fest, indem sie für jede mögliche Spielsituation eine Antwort bereithält:

Definition 3.2 *Eine* ***Strategie*** *für Spieler I in einem unendlichen Zwei-Personen-Spiel $G(X, A)$ mit perfekter Information ist eine Funktion*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & T_G^I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \phi(t) = x \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß

$$t \,\hat{}\, \phi(t) \in T_G$$

Eine Strategie für Spieler II definiert sich analog.

Eine Partie, zu der beide Spieler mit Strategien ϕ (Spieler I) bzw. ψ (Spieler II) antreten, läuft dann folgendermaßen ab:

0.1 Spieler I eröffnet mit $x_0 = \phi(\emptyset)$.

0.2 Spieler II antwortet mit $x_1 = \psi(\emptyset, x_0)$.

1.1 Spieler I setzt mit $x_2 = \phi(\emptyset, x_0, x_1)$ fort.

$\vdots$

n.2 Spieler II spielt $x_{2n+1} = \psi(\emptyset, x_0, x_1, \ldots, x_{2_n})$.

Das Ergebnis der Partie, also die Folge (x_n), sei mit $R(X, A, \phi, \psi)$ bezeichnet. (Ist klar, welches Spiel gemeint ist, schreibt man auch einfach $R(\phi, \psi)$.)

Jede Strategie ϕ für Spieler I kann mit einem Teilbaum von T_G assoziiert werden. Dieser Teilbaum enthält alle mögliche Partieverläufe, in denen Spieler I mit Strategie ϕ spielt.

Definition 3.3 *Ist ϕ eine Strategie für Spieler I für ein Spiel $G(X, A)$, so ist der Teilbaum $T_\phi \subseteq T_G$ definiert durch*

(1) $\emptyset \in T_\phi$

(2) $t \in T_\phi \cap T_G^I \;\Rightarrow\; t \,\hat{}\, \phi(t) \in T_\phi$

(3) $t \in T_\phi \cap T_G^{II} \;\Rightarrow\; (\forall s \in T_G^I)[(\text{len}(s) = \text{len}(t) + 1 \;\&\; t \sqsubset s) \;\rightarrow\; s \in T_\phi]$

In ähnlicher Weise definiert sich der Baum T_ψ, wenn ψ eine Strategie für Spieler II ist.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob für einen der beiden Spieler eine *Gewinnstrategie* existiert, eine Strategie, mit der er jede Partie eines Spiels $G(X, A)$ gewinnt, wenn er nur seiner Strategie folgt, egal welche Zugfolge sein Gegenspieler auch verwendet.

Definition 3.4 *Eine **Gewinnstrategie** für Spieler I für $G(X, A)$ ist eine Strategie ϕ, so daß gilt:*

$$[T_\phi] \subseteq A$$

*(Eine Gewinnstrategie für Spieler II definiert sich entsprechend.) Ein Spiel $G(X, A)$ heißt **determiniert**, falls einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.*

Die Frage der Determiniertheit von Spielen ist eines der zentralen Themen der Spieltheorie und wird auch in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehen. So sind z.B. *endliche Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele mit vollständiger Information* stets determiniert [vNM44]. Vorher hatte schon Zermelo [Zer12] Untersuchungen über solche Spiele angestellt. Für unendliche Spiele sind wesentliche Resultate von Gale und Stewart [GS53] sowie von Davis [Dav64] erzielt worden. Unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms kann gezeigt werden, daß es Spiele gibt, die nicht determiniert sind (siehe z.B. [Kec95]). Um so wichtiger ist es, Eigenschaften der Gewinnmenge A zu benennen, die eine Determiniertheit garantieren. Hierbei spielen oft *topologische* Eigenschaften eine Rolle.

3.2 Das Spiel von Banach-Mazur

Das Spiel von Banach und Mazur ist das älteste und bekannteste einer ganzen Reihe von *topologischen* Zwei-Personen-Spielen mit vollständiger Information. In einem topologischen Spiel wählen die Spieler Objekte, die in Beziehung zur topologischen Struktur eines Raumes stehen, wie z.B. Punkte, offene Mengen, abgeschlossene Hüllen, usw. (Dieses Verständnis von topologischen Spielen folgt Telgársky [Tel87]. Eine andere Definition wurde von Berge [Ber75] gegeben.) Auch in die Formulierung der Gewinnmenge können topologische Zusammenhänge eingehen.

Die meisten topologischen Spiele zielen darauf ab, eine spieltheoretische Beschreibung topologischer Eigenschaften zu ermöglichen, indem man einen Zusammenhang zwischen einer Eigenschaft der Gewinnmenge und der Determiniertheit des Spiels herstellt.

1935 erfand der polnische Mathematiker Stanisław Mazur folgendes Spiel: Vorgegeben sei eine Teilmenge A des Einheitsintervalls [0,1]. Spieler I und II spielen abwechselnd Teilintervalle I_n und J_n in [0,1].

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & I_0 & & I_1 & & \\ & & & & & \dots \\ \text{II} & & J_0 & & J_1 & \end{array}$$

wobei $I_n \supseteq J_n \supseteq I_{n+1},\ I_n, J_n \subseteq [0,1]$. Spieler I gewinnt die Partie, falls

$$\bigcap_{n\in\omega} I_n \ (= \bigcap_{n\in\omega} J_n) \cap A \neq \emptyset$$

Oxtoby [Oxt57] verallgemeinerte dieses Spielkonzept für topologische Räume: Sei X ein nichtleerer topologischer Raum sowie $A \subseteq X$.

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & U_0 & & U_1 & & \\ & & & & & \dots \\ \text{II} & & V_0 & & V_1 & \end{array}$$

mit $U_i \supseteq V_i \supseteq U_{i+1},\ U_i, V_i \subseteq X$ offen und nichtleer. Spieler I gewinnt dann und nur dann, wenn

$$\bigcap_{n\in\omega} U_n \ (= \bigcap_{n\in\omega} V_n) \cap A \neq \emptyset$$

Dieses Spiel sei mit $BM(X, A)$ bzw. $BM(A)$ bezeichnet, falls klar ist, welcher topologische Raum zugrunde liegt.

Satz 3.5 (Banach und Mazur, Oxtoby) *Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Spieler II besitzt Gewinnstrategie für $BM(X, A)$

(ii) A ist mager.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei ψ eine Gewinnstrategie für Spieler II.

Lemma 3.6 *Zu jedem Spielstand $t = (U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$ existiert eine Familie $\mathcal{U}_t$, für die gilt, daß die Mengen in*

$$\psi(\mathcal{U}_t) = \{\psi(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, U_{n+1}) : U_{n+1} \in \mathcal{U}_t\}$$

paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung dicht in V_n ist.

Beweis. Jede Kette (bezüglich der Inklusionsordnung) von Familien $\mathcal{W}_t$, für die $\psi(\mathcal{W}_t)$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht, besitzt eine obere Schranke. Nach dem Zornschen Lemma gibt es somit eine maximale solche Familie $\mathcal{U}_t$. Die Vereinigung der in $\psi(\mathcal{U}_t)$ enthaltenen Mengen ist dicht in V_n, denn sonst gäbe es eine offene Menge $\widetilde{U}$, die in $V_n - \bigcup_{V \in \psi(\mathcal{U}_t)} V$ enthalten ist, und somit $\mathcal{U}_t \cup \{\widetilde{U}\}$ die Maximalität von $\mathcal{U}_t$ verletzte. $\square$

Zum Beweis des Satzes wird ein Teilbaum $S \subseteq T_\psi$ konstruiert:

(1) $\emptyset \in S$.

(2) $(U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S \Rightarrow (U_0, V_0, \ldots, U_n, \psi(U_0, V_0, \ldots, U_n)) \in S$

(3) $t = (U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n) \in S \Rightarrow t\,\hat{}\,(U_{n+1}, \psi(t\,\hat{}\,(U_{n+1}))) \in S$, für alle $U_{n+1} \in \mathcal{U}_t$.

Definiert man nun $\mathcal{V}_n = \{V_n : (U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n) \in S\}$ und setzt

$$W_n = \bigcup_{V_n \in \mathcal{V}_n} V_n \tag{3.1}$$

so sind die W_n aufgrund der Konstruktion von S offen dicht in X für alle $n \in \omega$. Es ist zu zeigen, daß

$$\bigcap_{n \in \omega} W_n \cap A = \emptyset \tag{3.2}$$

Anderfalls existiert ein $x \in \bigcap W_n \cap A$, d.h. $x \in W_n$ für alle n. Nach Definition von W_n und S gibt es zu jedem n eine eindeutig bestimmte (die V_n in S sind disjunkt!) Zugfolge $(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n) \in S$ mit $x \in V_n$. Folglich existiert ein Partieverlauf $(U_0, V_0, \ldots) \in [S]$ derart, daß $x \in \bigcap V_n \cap A$, im Widerspruch zur Existenz einer Gewinnstrategie für Spieler II.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sei A mager, d.h.

$$A = \bigcup_{n \in \omega} W_n, \ W_n \text{ nirgends dicht} \tag{3.3}$$

Die Mengen $W_n^\complement$ sind offen dicht, haben also nichtleeren Durchschnitt mit jeder nichtleeren offenen Menge in X. Definiert man

$$\psi(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) = U_n \cap W_n^\complement \tag{3.4}$$

so folgt

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} (U_n \cap W_n^\complement) \subseteq \bigcap_{n \in \omega} W_n^\complement \subseteq A^\complement \tag{3.5}$$

und somit

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n \cap A = \emptyset \tag{3.6}$$

Also ist ψ Gewinnstrategie für Spieler II. $\square$

Zur Geschichte dieses Satzes ist folgendes anzumerken: Das Spielkonzept auf der reellen Zahlengeraden wurde 1935 von Stanisław Mazur erfunden. Er konnte jedoch nur eine Richtung von Satz 3.5 beweisen, nämlich daß aus der Magerheit von A die Existenz einer Gewinnstrategie für Spieler II folgt . Die andere Richtung notierte er als Vermutung im *Scottish Book* (Problem 43, s. [Mau81]). Banach zeigte, daß Mazurs Vermutung zutrifft, veröffentlichte den Beweis jedoch nicht. In [Oxt57] präsentierte Oxtoby einen Beweis in einem verallgemeinerten Rahmen.

Das Spiel von Banach-Mazur war das erste in einer Reihe von unendlichen Zwei-Personen-Spielen mit perfekter Information. Nachfolgend wurden zahlreiche, in der Anlage ähnliche Spiele untersucht. Eine Übersicht findet sich in [Tel87].

4 Baire-Kategorie im Cantorraum

In diesem Abschnitt wird eine Topologie auf dem Cantorraum 2^ω eingeführt. Anschließend sollen die Konzepte der Baire-Kategorie für diesen Spezialfall genauer untersucht werden. Insbesondere wird gezeigt, daß 2^ω ein Bairescher Raum ist.

Mit Hilfe *endlicher Erweiterungsfunktionen* lassen sich die Eigenschaften *mager* und *comager* in eleganter Weise charakterisieren. Gleichzeitig bilden diese Funktionen den Anknüpfungspunkt für die *resourcenbeschränkte Baire-Kategorie*, wie sie in Abschnitt 4 beschrieben wird. Zum Abschluß des Abschnitts werden die Banach-Mazur-Spiele im Cantorraum vorgestellt.

Zunächst steht jedoch eine Begriffsklärung an. Auf den Cantorraum als topologischem Raum müßte als *Menge* Bezug genommen werden. Die Elemente dieser Menge sind unendliche *0-1-Folgen*. Rekursionstheoretisch werden solche 0-1-Folgen aber als *charakteristische Funktion* einer Teilmenge der natürlichen Zahlen aufgefaßt. Die wichtigen Objekte sind meist Mengen von natürlichen Zahlen: die rekursiv aufzählbaren Mengen, die rekursiven Mengen, die polynomialzeit-berechenbaren Mengen, usw. Diese werden als *Klassen* bezeichnet. In dieser Arbeit soll an dieser Konvention festgehalten werden, so daß auf Teilmengen des Cantorraums als Klassen, auf Elemente von 2^ω als Mengen Bezug genommen wird. Im folgenden wird also von *mageren Klassen* oder von *einer Menge* $A \in 2^\omega$ die Rede sein.

4.1 Der Cantorraum als topologischer Raum

Der **Cantorraum** 2^ω ist definiert als Produktraum $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\} \times \ldots$ abzählbar vieler Kopien von $\{0,1\}$. Versieht man $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie - alle Teilmengen sind offen (also auch abgeschlossen) - so ergibt sich eine Topologie für 2^ω aus der induzierten *Produkttopologie.* Diese ist die kleinste Topologie auf 2^ω, für die die Projektionen $p_n : 2^\omega \to \{0,1\}$, $p_n(A) = A(n)$ stetig sind. Wie man leicht einsieht, lassen sich die Urbilder der p_n als endliche Vereinigung der sogenannten **offenen Kegel** $\mathbf{B}_x$, $x \in 2^{<\omega}$, darstellen:

$$\mathbf{B}_x = \{B \in 2^\omega : x \sqsubset B\}$$

Diese Teilklassen bilden eine Basis der Produkttopologie auf dem Cantorraum. Aus diesem Grund werden sie auch **basis-offene** Klassen des Cantorraums genannt. Jede andere offene Menge läßt sich als Vereinigung solcher offenen Kegel darstellen.

Im weiteren Verlauf spielen diese basis-offenen Klassen eine entscheidende Rolle. Deshalb seien an dieser Stelle kurz einige wesentliche Eigenschaften zusammengefaßt.

Bemerkung 4.1 *Für die offenen Kegel in* 2^ω *gelten folgende Eigenschaften:*

(1) $\mathbf{B}_\lambda = 2^\omega$*.*

(2) Für zwei Kegel $\mathbf{B}_x$ *und* $\mathbf{B}_y$ *gilt genau einer der folgenden Fälle:*

(a) $\mathbf{B}_x = \mathbf{B}_y$ *(im Fall* $x = y$*)*
(b) $\mathbf{B}_x \subset \mathbf{B}_y$ *(im Fall* $x \sqsupset y$*)*
(c) $\mathbf{B}_x \supset \mathbf{B}_y$ *(im Fall* $x \sqsubset y$*)*
(d) $\mathbf{B}_x \cap \mathbf{B}_y = \emptyset$ *(im Fall* $x \parallel y$*)*

Die Begriffe der Baire-Kategorie lassen sich Cantorraum-spezifisch formulieren.

Proposition 4.2 *Für eine Teilklasse* $\mathbf{C}$ *des Cantorraums* 2^ω *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{C}$ *ist nirgends dicht.*

(ii) $(\forall x)(\exists y \sqsupseteq x)[\mathbf{B}_y \cap \mathbf{C} = \emptyset]$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ nirgends dicht, d.h. $\mathbf{C}^{\complement}$ enthält eine offene, dichte Teilklasse $\mathbf{B}$. Da $\mathbf{B}$ offen ist, läßt es sich darstellen als Vereinigung offener Kegel, also $\mathbf{B} = \bigcup_{y \in S} \mathbf{B}_y, S \subseteq 2^{<\omega}$. Ist $x \in 2^{<\omega}$, so ist wegen der Dichte von $\mathbf{B}$ der Durchschnitt $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}_x$ nicht leer. Folglich existiert ein $y \in S$, für das $\mathbf{B}_y \cap \mathbf{B}_x \neq \emptyset$ gilt. Nach Bemerkung 4.1 ist dann ein Kegel im anderen enthalten. Gilt $\mathbf{B}_x \subset \mathbf{B}_y$, so folgt $\mathbf{B}_x \subset \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}^{\complement}$. Andernfalls gilt $x \sqsubseteq y$ und es gilt $\mathbf{B}_y \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}^{\complement}$.

$(ii) \Leftarrow (i)$. Betrachte die Menge $\mathbf{B} = \bigcup_{x \in 2^{<\omega}} \mathbf{B}_{y_x}$, wobei y_x den nach Voraussetzung existierenden String bezeichnet, der x erweitert und dessen Durchschnitt mit $\mathbf{C}$ leer ist. $\mathbf{B}$ ist sicherlich offen und auch dicht, da $\mathbf{B}$ jeden offenen Kegel $\mathbf{B}_x$ schneidet. Außerdem liegt $\mathbf{B}$ im Komplement von $\mathbf{C}$. □

Endliche Erweiterungsfunktionen

Bevor die Begriffe der Baire-Kategorie auf 2^ω näher untersucht werden, wird zunächst ein wichtiges Hilfsmittel zu deren Beschreibung eingeführt.

Definition 4.3 *Eine Funktion* $f : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ *ist eine* ***endliche Erweiterungsfunktion*** *(im folgenden auch einfach als* Erweiterungsfunktion *bezeichnet), falls*

$$(\forall x \in 2^{<\omega})[x \sqsubseteq f(x)]$$

Eine Erweiterungsfunktion heißt ***echt****, falls für alle* $x \in 2^{<\omega}$ *gilt, daß* $x \sqsubset f(x)$*.*

Eine Menge $A \in 2^\omega$ **erfüllt** eine (endliche) Erweiterungsfunktion f, falls es einen String x gibt, so daß $f(x) \sqsubset A$ gilt. Die nächste Proposition folgt unmittelbar.

Proposition 4.4 *Eine Klasse* $\mathbf{C} \in 2^\omega$ *ist dann und nur dann nirgends dicht, wenn es eine Erweiterungsfunktion* f *gibt, so daß*

$$(\forall A \in \mathbf{C})(\forall x)[f(x) \not\sqsubset A]$$

d.h. f *wird von keiner Menge aus* $\mathbf{C}$ *erfüllt.*

Eine erste Anwendung dieser Charakterisierung ist folgende Proposition.

Proposition 4.5 *Jede abzählbare Klasse in* 2^ω *ist mager.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jede Klasse $\{A\}$, $A \in 2^\omega$, nirgends dicht ist. Ist $A \in 2^\omega$, so erfüllt A folgende Funktion f nicht:

$$f(x) = x\hat{\ }(1 - A(|x|))$$

□

Definition 4.6 *Ein* ***System*** *von Erweiterungsfunktionen ist eine Funktion* $f : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ *mit der Eigenschaft, daß* f_n *für alle* $n \geq 0$ *eine endliche Erweiterungsfunktion ist.*

Die folgende Proposition ist leicht nachvollziehbar.

Proposition 4.7 *Eine Klasse* $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ *ist dann und nur dann mager, wenn es ein System* f *von Erweiterungsfunktionen gibt, so daß jedes* $A \in \mathbf{C}$ *mindestens eine Funktion* f_n *nicht erfüllt. (In diesem Fall heißt* $\mathbf{C}$ *mager* via f*.)*

Mit Hilfe dieser Charakterisierung läßt sich ein wichtiges Resultat elegant beweisen. Die hierbei gebrauchte Beweistechnik wird im weiteren Verlauf wieder auftauchen - wenn auch in komplexerer Form.

Satz 4.8 (Baire) 2^ω *ist ein Bairescher Raum.*

Beweis. Es wird gezeigt, daß jede comagere Klasse dicht ist. Sei also $\mathbf{C}$ comager, d.h. $\mathbf{C}^{\complement}$ ist mager via f. Angenommen, es gibt eine basis-offene Klasse $\mathbf{B}_x$ im Komplement von $\mathbf{C}$. In diesem Fall gäbe es eine Menge $A \in \mathbf{C}^{\complement}$, die alle f_n erfüllt, im Widerspruch zur Magerheit von $\mathbf{C}$. Die Konstruktion von A erfolgt in Schritten, wobei im s-ten Schritt sichergestellt wird, daß A f_s erfüllt. Zu diesem Zweck wird eine streng monotone Funktion $l : \omega \to \omega$ definiert. Im s-ten Schritt werden $l(s)$ sowie alle Anfangsstücke $A \upharpoonright n$ mit $A \upharpoonright l(n-1) \sqsubset A \upharpoonright n \sqsubseteq A \upharpoonright l(n)$ bestimmt. Initialisiere mit $l(-1) = |x|$ und $A \upharpoonright l(n-1) = x$. Sind s und $A \upharpoonright l(s-1)$ gegeben, so setze

$$A \upharpoonright l(s) = f_s(A \upharpoonright l(s-1)) \tag{4.1}$$

Offensichtlich erfüllt A sämtliche f_s. □

Die endliche Erweiterungsmethode

Die *endliche Erweiterungsmethode* macht sich Satz 4.8 zunutze. Man will eine Menge A konstruieren, die eine abzählbare Familie $(\mathbf{R}_n)_{n\in\omega}$ von Bedingungen erfüllt. Die Konstruktion erfolgt in Schritten, wobei im n-ten Schritt sichergestellt wird, daß die Bedingung R_n erfüllt wird. Ein wichtiges Merkmal ist, daß jede Bedingung unabhängig vom bisherigen wie vom nachfolgenden Verlauf der Konstruktion, d.h. *lokal* erfüllt werden kann. Identifiziert man eine Bedingung $\mathbf{R}_n$ mit der Klasse der Mengen, die sie erfüllen, so ist diese lokale Erfüllbarkeit offenbar durch folgende Eigenschaft gewährleistet:

$$(\forall x)(\exists y \sqsupseteq x)(\forall A \sqsupset y)[A \in \mathbf{R}_n] \tag{4.2}$$

(4.2) besagt jedoch gerade, daß die Klassen $\mathbf{R}_n$ offen dicht sind. Folglich ist ihr Durchschnitt comager, nach Definition 2.6 und Satz 4.8 also nichtleer. Jede abzählbare Familie $(\mathbf{R}_n)_{n\in\omega}$ von Bedingungen, die (4.2) erfüllt, ist für eine endliche Erweiterungskonstruktion geeignet, so z.B. einfache Diagonalisierungsargumente.

Die Baire-Kategorie auf 2^ω kann also als abstraktes Modell der endlichen Erweiterungsmethode angesehen werden.

4.2 Topologische Spiele im Cantorraum

Im vorherigen Abschnitt wurden Banach-Mazur-Spiele im generellen Kontext topologischer Räume eingeführt. Die spezielle topologische Struktur des Cantorraums erlaubt es, ein vereinfachtes, äquivalentes Spielmodell zu definieren.

Definition 4.9 *Zwei Spiele G und G' heißen* ***äquivalent****, falls Spieler I (bzw. Spieler II) für G genau dann eine Gewinnstrategie besitzt, wenn I (bzw. II) eine Gewinnstrategie für G' hat.*

Man betrachte folgendes Spiel $BM^*(\mathbf{C})$ auf 2^ω. Gegeben sei eine Klasse $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$. Zwei Spieler erweitern abwechselnd ein Anfangsstück um nichtleere Strings:

$$\begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & x_0 & & x_1 & & & \\ & & & & & \ldots & \\ \mathrm{II} & & y_0 & & y_1 & & \end{array}$$

wobei $x_n, y_n \in 2^{<\omega}$, $x_n, y_n \neq \lambda$ für alle $n \geq 0$. Das Resultat dieses Spiels ist definiert als die eindeutig durch folgende Anfangsstücke bestimmte Menge $R \in 2^\omega$:

$$R \restriction r_n = x_0\hat{\ } y_0\hat{\ } \ldots \hat{\ } x_n\hat{\ } y_n \tag{4.3}$$

Spieler I gewinnt die Partie, falls $R \in \mathbf{C}$; andernfalls gewinnt Spieler II.

Satz 4.10 *Für $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ sind die Spiele $BM^*(\mathbf{C})$ und $BM(2^\omega, \mathbf{C})$ äquivalent.*

Beweis. Sei ϕ eine Gewinnstrategie für Spieler I für $BM(2^\omega, \mathbf{C})$, $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$. Es ist eine Gewinnstrategie ϕ^* für Spieler I für $BM^*(\mathbf{C})$ anzugeben. Hierzu sei $s = (\lambda, x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) \in T^I_{BM^*}$ gegeben mit $x_0\hat{\ } y_0\hat{\ } \ldots \hat{\ } x_n\hat{\ } y_n \sqsubset \mathbf{C}$. Finde für $0 \leq m \leq n$ $U_m \supseteq \mathbf{B}_{x_0\hat{\ } y_0\hat{\ } \ldots \hat{\ } x_m}$ und $V_m \supseteq \mathbf{B}_{x_0\hat{\ } y_0\hat{\ } \ldots \hat{\ } x_m\hat{\ } y_m}$, so daß

$$(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n) \in T_\phi \tag{4.4}$$

Dann gilt, da ϕ Gewinnstrategie für Spieler I ist,

$$(\forall V_{n+1} \subseteq \phi(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n))[V_{n+1} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset] \tag{4.5}$$

$\phi(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n)$ läßt sich darstellen als Vereinigung von offenen Kegeln, d.h. es existiert $S \subseteq 2^{<\omega}$, so daß

$$\phi(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n) = \bigcup_{x \in S} \mathbf{B}_x \tag{4.6}$$

Wegen (4.5) muß es ein $x \in S$ geben mit $x_0\hat{\ } y_0\hat{\ } \ldots \hat{\ } x_n\hat{\ } y_n \sqsubseteq x$, für das

$$(\forall y \sqsupseteq x)[\mathbf{B}_y \cap \mathbf{C} \neq \emptyset] \tag{4.7}$$

gilt. Wähle solch ein x (unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms) und setze $\phi^*(s) = (x\hat{\ } 0) - (x_0\hat{\ } y_0\hat{\ } \ldots \hat{\ } x_n\hat{\ } y_n)$. ($\phi^*(s) = 0$, falls $x_0\hat{\ } y_0\hat{\ } \ldots \hat{\ } x_n\hat{\ } y_n \not\sqsubset \mathbf{C}$.) Man sieht leicht, daß dies eine Gewinnstrategie für $BM^*(\mathbf{C})$ definiert. Sei nun ψ eine Gewinnstrategie für Spieler II für $BM(2^\omega, \mathbf{C})$. U_m und V_m seien wie oben definiert. Ist $t = (x_0, y_0, \ldots, x_n) \in T^{II}_{BM*}$, so existiert wiederum $S \subseteq 2^{<\omega}$ derart, daß

$$\psi(U_0, V_0, \ldots, U_n) = \bigcup_{x \in S} \mathbf{B}_x \tag{4.8}$$

Wähle $x \in S$ mit minimaler Länge und setze

$$\psi^*(t) = (x\hat{}\,0) - (x_0\hat{}\,y_0\hat{}\,\ldots\hat{}\,x_n) \tag{4.9}$$

ψ^* ist eine Gewinnstrategie für Spieler II für $BM^*(\mathbf{C})$. Die entgegengesetzte Richtung der Äquivalenz ist offensichtlich. $\square$

Fortan soll unter einem Banach-Mazur-Spiel auf 2^ω stets das oben als $BM^*(\mathbf{C})$ eingeführte Modell verstanden werden, folglich auch die Bezeichnung $BM(\mathbf{C})$ tragen.

Neben dem eigentlichen Spielmodell läßt sich auch der Begriff der *Strategie* vereinfachen. Betrachtet man den Beweis zu Satz 3.5, so fällt auf, daß dort zur Konstruktion einer Gewinnstrategie für Spieler II zu einer gegebenen mageren Menge niemals auf sämtliche bisher gespielte offenen Mengen Bezug genommen wird, sondern lediglich auf die "aktuelle", von Spieler I zuletzt gespielte Menge. Übertragen auf den Cantorraum bedeutet das, daß ein String $x \in 2^{<\omega}$ als Information für Spieler II zur Berechnung seines nächsten Zuges genügt; es ist für ihn unwichtig, welcher Teil dieses Strings von welchem Spieler in welcher Runde gespielt wurde. Deshalb bleibt das Hauptresultat (Satz 3.5) über Banach-Mazur-Spiele gültig, wenn man als Strategien nur noch echte Erweiterungsfunktionen zuläßt.

Seien also g und h zwei echte Erweiterungsfunktionen. Spielen Spieler I und Spieler II mit den Strategien g bzw. h, so läßt sich das Resultat $R(g,h)$ der Partie nun folgendermaßen beschreiben:

$$R \restriction r_m = (h \circ g)^m(\lambda) \tag{4.10}$$

Satz 4.11 *Sei* $\mathbf{C}$ *eine Teilmenge des Cantorraums. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie für $BM(\mathbf{C})$*.*

(ii) $\mathbf{C}$ *ist mager.*

Beweis. Vorbemerkung: Nach dem oben gesagten ergibt sich der Beweis leicht aus Satz 3.5. Dennoch soll der Beweis hier vollständig präsentiert werden, da die Struktur wichtig für das Verständnis späterer Abschnitte ist. Er folgt im Wesentlichen [Fen91].

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Sei h eine Gewinnstrategie für Spieler II. Es ist ein System f von Erweiterungsfunktionen anzugeben, das die Magerheit von $\mathbf{C}$ bezeugt, d.h. zu jedem $A \in \mathbf{C}$ existiert ein Index k, so daß A f_k nicht erfüllt. Definiere hierzu

$$f_k(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls } |x| > k \\ h(x\hat{}\,0^{k-|x|+1}) & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.11}$$

Angenommen, es gäbe ein $A \in \mathbf{C}$, das alle f_k erfüllte. Es soll gezeigt werden, daß in diesem Fall eine Strategie g für Spieler I existierte mit $R(g,h) \in \mathbf{C}$, im Widerspruch zur Gewinnstrategie von Spieler II.

Zu jedem $x \sqsubset A$ existiert ein x_A mit der Eigenschaft, daß

$$f_{|x|}(x_A) \sqsubset A \tag{4.12}$$

Aus der Definition der f_k folgt, daß $|x_A| > |x|$. Setze also $g(x) = x_A$, falls $x \sqsubset A$, und $g(x) = x\hat{}0$ sonst. Induktiv ergibt sich $R(g,h) = A$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sei $\mathbf{C}$ mager via f. Es ist eine Gewinnstrategie h zu konstruieren. Zu diesem Zweck genügt es, daß während des Spielverlaufs sichergestellt wird, daß jedes f_k mindestens einmal simuliert wird (d.h. die Resultatsmenge R erfüllt jedes f_k). Dann nämlich kann das Resultat R nicht in $\mathbf{C}$ liegen, da aufgrund der Magerheit von $\mathbf{C}$ jede darin enthaltene Menge A mindestens ein f_k nicht erfüllt.

Gegeben sei $x \in 2^{<\omega}$. f_k *verlangt Aufmerksamkeit für* x, falls

$$k \leq |x| \quad \text{und} \quad (\forall y \sqsubseteq x)[f_k(y) \not\sqsubseteq x] \tag{4.13}$$

(f_k wurde bisher noch nicht simuliert.) Bestimme den kleinsten Index k, so daß f_k für x Aufmerksamkeit verlangt und definiere $h(x) = f_k(x)$. (In diesem Fall *erhält* f_k *Aufmerksamkeit.*) Falls kein solches k existiert, setze $h(x) = x\hat{}0$.

Eine einfache Induktion zeigt, daß $R(g,h)\restriction r_n$ die Funktionen $f_0, \ldots, f_{n-1}$ erfüllt, für alle I-Strategien g. Somit erfüllt $R(g,h)$ jede Funktion f_k. □

Cut-and-Choose-Spiele

Eine interessante Variante des Banach-Mazur-Spiels ergibt sich, wenn man die Erweiterungslänge von Spieler II auf ein Bit beschränkt. Sei wiederum $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$.

$$\begin{array}{cccccc} \text{I} & x_0 & & x_1 & & \\ & & & & & \cdots \\ \text{II} & & i_0 & & i_1 & \end{array}$$

wobei $x_n \in 2^{<\omega}$, $i_n \in \{0,1\}$ für alle $n \geq 0$. Das Resultat ist definiert als Menge R, gegeben durch die Anfangsstücke

$$R\restriction r_m = x_0\hat{}i_0\hat{}\ldots\hat{}x_m\hat{}i_m$$

Wiederum gewinnt Spieler I, wenn $R \in \mathbf{C}$; andernfalls siegt Spieler II. Dieses Spiel sei mit $CC(\mathbf{C})$ (*Cut-and-Choose*) bezeichnet.

Wie im Fall des Banach-Mazur-Spiels auf 2^ω so kann auch hier der Begriff der Strategie vereinfacht werden. Eine Strategie für Spieler I ist eine Erweiterungsfunktion g, wohingegen eine Strategie für Spieler II nun aus einer Funktion $i : 2^{<\omega} \to \{0, 1\}$ besteht. Solch einer Funktion kann auf natürliche Weise eine Erweiterungsfunktion h^i zugeordnet werden, indem man $h^i(x) = x\hat{\ } i(x)$ setzt. Der Spielstand einer Partie, die mit Strategien g bzw. i geführt wird, nach Runde m definiert sich wie folgt:

$$R \restriction r_m = (h^i \circ g)^m(\lambda)$$

Duch diese einfache Modifikation läßt sich die Abzählbarkeit von Klassen spieltheoretisch beschreiben.

Satz 4.12 *Sei* $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie für $CC(\mathbf{C})$.

(ii) $\mathbf{C}$ *ist abzählbar.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei i eine Gewinnstrategie für Spieler II für $CC(\mathbf{C})$. Zu jedem $A \in \mathbf{C}$ existiert dann genau ein $x_A \sqsubset A$, so daß

$$h^i(x_A) \not\sqsubset A \quad \text{und} \quad (\forall y \sqsupseteq x_A)[y \sqsubset A \to h^i(y) \not\sqsubset A] \tag{4.14}$$

Es soll gezeigt werden, daß die Zuordnung $A \mapsto x_A$ injektiv ist, denn dann folgt aus der Abzählbarkeit von $2^{<\omega}$ auch die Abzählbarkeit von $\mathbf{C}$. Angenommen, es gibt $A_0, A_1 \in \mathbf{C}$ mit $A_0 \neq A_1$ aber $x_{A_0} = x_{A_1} = x$, so folgt aus $h^i(x) \not\sqsubset A_0$ und $h^i(x) \not\sqsubset A_1$, daß $y = A_0 \sqcup A_1 \sqsupset x$, wenn $y \sqsubset A_0$ und $y \sqsubset A_1$ und $z \not\sqsubset A_0 \vee z \not\sqsubset A_1$ für alle $z \sqsupset y$. Da entweder $h^i(y) \sqsubset A_0$ oder $h^i(x) \sqsubset A_1$ gelten muß, ergibt sich ein Widerspruch zur Definition von x.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sei $\mathbf{C}$ abzählbar, also $\mathbf{C} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$. Es muß eine Gewinnstrategie i für Spieler II für $CC(\mathbf{C})$ definiert werden. Hierfür sei $x \in 2^{<\omega}$ gegeben. Ein Index k *verlangt Aufmerksamkeit für* x, falls

$$k \leq |x| \quad \text{und} \quad x \sqsubset A_k \tag{4.15}$$

Wähle das kleinste k, für das x Aufmerksamkeit verlangt, und setze $i(x) = 1 - A_k(|x|)$. Existiert kein solches k, definiere $i(x) = 0$. Offensichtlich wird so sichergestellt, daß das Resultat einer Partie nicht in $\mathbf{C}$ enthalten ist. □

Das Cut-and-Choose-Spiel kann wie das Spiel von Banach-Mazur allgemein auf topologischen Räume eingeführt werden. Damit jedoch Satz 4.12 in diesem allgemeineren Rahmen Gültigkeit hat, muß der zugrundeliegende topologische Raum X weitere Eigenschaften erfüllen, die hier einzuführen den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden (X muß ein *perfekter polnischer Raum* sein). Näheres hierzu findet sich in [Kec95].

5 Resourcenbeschränkte Kategorienkonzepte

Für Anwendungen in der Rekursions- oder Komplexitätstheorie besitzt die Baire-Kategorie in ihrer klassischen Form einen entscheidenden Nachteil: Klassen von rekursiven Mengen sind abzählbar, also mager. Baire-Kategorie ist folglich zu grob, um zwischen solchen Klassen zu differenzieren. Folglich können Existenzbeweise, die sich die Baire-Kategorie zu Nutze machen, keine Aussagen über den Berechenbarkeits- oder Komplexitätsgrad des Objektes machen.

Dieser Problematik läßt sich durch das Konzept der *beschränkten Baire-Kategorie* Abhilfe schaffen. Hierbei wird ein *System* nirgends dichter Klassen ausgezeichnet, das als Grundlage des neuen Kategorienkonzeptes dient. Eine Klasse ist dann *mager* im Sinne der beschränkten Baire-Kategorie, wenn sie uniforme (hinsichtlich des Systems von nirgends dichten Klassen) Vereinigung von solchen nirgends dichten Klassen ist.

Die Art und Weise, in der ein solches System ausgezeichnet wird, kann verschieden sein. Eine Möglichkeit zieht sog. *Bedingungsmengen* heran. (Siehe u.a [AS96] oder [Joc85].) Ein anderer Zugang, der hier beschrieben werden soll, erfolgt über endliche Erweiterungsfunktionen.

Nach Proposition 4.4 läßt sich die Eigenschaft einer Klasse nirgends dicht zu sein, über endliche Erweiterungsfunktionen charakterisieren. Somit genügt zur Auswahl eines Systems von nirgends dichten Klassen die Angabe einer Klasse Δ von Erweiterungsfunktionen.

Definition 5.1 *Sei Δ eine Funktionenklasse. Eine Klasse* $\mathbf{C}$ *heißt*

(a) ***Δ-nirgends dicht****, falls es eine Funktion $f \in \Delta$ gibt, so daß* $\mathbf{C}$ *nirgends dicht via f ist.*

(b) ***Δ-mager****, falls ein System $f \in \Delta$ von Erweiterungsfunktionen existiert, so daß* $\mathbf{C}$ *mager via f ist.*

(c) ***Δ-comager****, falls* $\mathbf{C}^{\complement}$ *Δ-mager ist.*

Es ist wünschenwert, daß sich die in Abschnitt 2.1 beschriebene Idealeigenschaft der Baire-Kategorie auf das Konzept der Δ-Kategorie überträgt, daß also gilt:

(1) Teilmengen von Δ-mageren Mengen sind Δ-mager.

(2) Δ-uniforme Vereinigungen von Δ-mageren Mengen sind Δ-mager.

Erfüllt ein Kategorienkonzept für eine Klasse Δ diese Eigenschaften, so bilden die Δ-mageren Klassen ein **Δ-Ideal**. Darüber hinaus sollte im Hinblick auf die eingangs erwähnte Problematik eine verallgemeinerte Version des Baireschen Kategorietheorems (Satz 4.8) Gültigkeit haben, das besagt, daß die Klasse, bezüglich derer die Baire-Kategorie relativiert wird, nicht mehr mager ist. Ist all dies für eine Klasse Δ erfüllt, so sei das zugehörige Kategorienkonzept als **fundiert** bezeichnet. Bei beliebiger Wahl von Δ ist dies natürlich nicht gewährleistet. In [Fen95] zeigt Fenner, daß Klassen, die unter polynomieller Truth-Table-Reduzierbarkeit abgeschlossen sind, ein fundiertes Kategorienkonzept ergeben.

5.1 Die Ansätze von Mehlhorn und Lutz

Im folgenden soll das Konzept der Δ-Kategorie exemplarisch für einige wichtige Funktionenklassen genauer untersucht werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{ALL} &= \{f \;:\; f : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}\}\\ \mathbf{REC} &= \{f \in \mathbf{ALL} \;:\; f \text{ rekursiv}\}\\ \mathbf{P} &= \{f \in \mathbf{ALL} \;: \exists k\, (f \in \mathbf{DTIME}(n^k))\}\end{aligned}$$

Die Klasse **ALL** ergibt natürlich die klassische Baire-Kategorie auf 2^ω. **REC**-Kategorie wurde erstmals von Mehlhorn [Meh73] unter der Bezeichnung *effektive Baire-Kategorie* eingeführt. Unabhängig davon beschrieb Lisagor [Lis81] ein effektives Kategorienkonzept für ω^ω anhand von *effektiven Banach-Mazur-Spielen*, von denen später noch die Rede sein wird. Lutz [Lut90] verfolgte Mehlhorns Ansatz für resourcenbeschränkte Klassen. Stellvertretend für geeignete subrekursive Klassen wird hier nur auf **P**-Kategorie eingegangen. Näheres zur resourcenbeschränkten Kategorie für subrekursive, insbesondere subexponentielle Funktionenklassen findet sich in [Lut90]. Dort wird insbesondere ein formeller Rahmen benutzt, der sich leicht auf hiesige Darstellung übertragen ließe.

Satz 5.2 (Mehlhorn, Lutz) *Für $\Delta = \mathbf{ALL}, \mathbf{REC}, \mathbf{P}$ bilden die Δ-mageren Klassen ein Δ-Ideal.*

Beweis. (1) folgt sofort auf der Definition, für (2) sei $\mathbf{C} = \bigcup_{k\in\omega} \mathbf{C}_k$ und $f \in \Delta$ ein System derart, daß $\mathbf{C}_k$ Δ-mager ist via f_k für alle $k \in \omega$. Definiere

$$\hat{f}(\langle\langle x, y\rangle, z\rangle) = f(\langle x, \langle y, z\rangle\rangle)$$

Offensichtlich ist $\hat{f} \in \Delta$ ein System von Erweiterungsfunktionen. Sei $A \in \mathbf{C}$, folglich gibt es ein $k \geq 0$, so daß $A \in \mathbf{C}_k$, und $\mathbf{C}_k$ ist Δ-mager via f_k. Folglich gibt es ein j derart, daß A $f_{k,j} = \hat{f}_{\langle k,j\rangle}$ nicht erfüllt. Somit ist $\mathbf{C}$ Δ-mager via $\hat{f}$. □

Mehlhorn und Lutz zeigen außerdem, daß für $\Delta = \mathbf{REC}, \mathbf{P}$ das Konzept der Δ-Kategorie fundiert ist. Dies soll hier exemplarisch für **REC** demonstriert werden.

Satz 5.3 (Mehlhorn) **REC** *ist nicht* **REC**-*mager.*

Beweis. Sei $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ eine **REC**-magere Klasse, also mager via eines Systems $f \in \mathbf{REC}$. Es soll gezeigt werden, daß $\mathbf{REC} \not\subseteq \mathbf{C}$. Zu diesem Zweck genügt es, eine rekursive Menge $A \notin \mathbf{C}$ anzugeben. Dazu ist sicherzustellen, daß A jede Funktion f_k erfüllt. Die Konstruktion von A erfolgt nach dem Muster des Beweises zu Satz 4.8. Diesmal sei $l(-1) = 0$. Ist $s \geq 0$ und $A \restriction l(s-1)$, so sezte

$$A \restriction l(s) = f_s(A \restriction l(s-1)) \tag{5.1}$$

Offensichtlich ist A rekursiv und erfüllt jedes f_k. $\square$

Für den Fall $\Delta = \mathbf{P}$ kann derselbe Beweis benutzt werden, jedoch ergibt sich durch diese Konstruktion bei polynomiellen Erweiterungsfunktionen f_k eine Menge A in $\mathbf{E} = \{f \in \mathbf{ALL} : \exists k\ (f \in \mathbf{DTIME}(2^{kn}))\}$. Dies liegt daran, daß ein String x sowohl als Zahl als auch als Anfangsstück einer Menge in 2^ω aufgefaßt werden kann. Bedeutsam ist dies für die Beschreibung von Längen von Anfangsstücken $A \restriction x$:

$$2^{|x|} - 1 \ \leq\ |A \restriction x| \ \leq\ 2^{|x|+1} - 1 \tag{5.2}$$

Somit beschreibt **P**-Kategorie ein Kategorienkonzept für Exponentialzeit. (Näheres findet sich wiederum in [Lut90].)

5.2 Die Kategorienkozepte von Fenner

Fenner [Fen91] beobachtete, daß das Konzept der **P**-Kategorie zahlreiche Schwächen aufweist. Diese rühren daher, daß die polynomielle Zeitbeschränktheit der Erweiterungsfunktionen eine Längenbeschränktheit der Erweiterung nach sich zieht. Es ist naheliegend, diese Längenbeschränkung abzuschwächen, indem man den Begriff der Erweiterungsfunktion modifiziert. Wichtig ist lediglich, daß die modifizierten Funktionen sich auf natürliche Weise einer Erweiterungsfunktion zuordnen lassen, so daß sich die Konzepte der Baire-Kategorie weiterhin gemäß Proposition 4.7 beschreiben lassen. Ein Beispiel hierzu ist eine Variante des in [Fen91] beschriebenen Ansatzes.

Definition 5.4 *Eine F-**Erweiterungsfunktion** ist eine Funktion*

$$\begin{array}{rccl} f: & 2^{<\omega} & \longrightarrow & \{0,1\} \times (2^{<\omega})^{<\omega} \\ & x & \longmapsto & f(x) = (i, x_0, \ldots, x_n) \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß $|x| \leq x_0 < \cdots < x_n$.

(Man beachte, daß die Strings $x_0, \ldots, x_n$ hier als Binärdarstellung natürlicher Zahlen aufgefaßt werden.) F-Erweiterungsfunktionen geben nicht die ganze Erweiterung eines Strings explizit an, sondern nur entweder die Stellen der Einsen oder die Stellen der Nullen. Einer F-Erweiterungsfunktion f kann wie folgt eine Erweiterungsfunktion f^F zugeordnet werden: Sei $f(x) = (i, x_0, \ldots, x_n)$. Ist $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$, so setze

$$f^F(x)(y) = \begin{cases} x(y) & \text{falls } y < |x| \\ i & \text{falls } y \in S \\ 1-i & \text{falls } y \geq |x| \ \& \ y \notin S \end{cases}$$

Ein System vom F-Erweiterungsfunktionen (F-System) ist eine Funktion f mit der Eigenschaft, daß, für $k \geq 0$, f_k eine F-Erweiterungsfunktion beschreibt. Die Begriffe der beschränkten Baire-Kategorie definieren sich nun in kanonischer Art und Weise (siehe Definition 5.1).

Definition 5.5 (Fenner) *Sei Δ eine Funktionenklasse. Eine Klasse $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ heißt*

*(a) Δ^F**-nirgends dicht**, falls es eine Funktion $f \in \Delta$ gibt, so daß $\mathbf{C}$ nirgends dicht via f^F ist.*

*(b) Δ^F**-mager**, falls ein System $f \in \Delta$ von F-Erweiterungsfunktionen existiert, so daß zu jedem $A \in \mathbf{C}$ ein k existiert derart, daß A f_k^F nicht erfüllt.*

*(c) Δ^F**-comager**, falls $\mathbf{C}^\mathsf{C}$ Δ^F-mager ist.*

Analog zu Satz 5.2 läßt sich zeigen, daß dieses Kategorienkonzept für $\Delta = \mathbf{ALL}, \mathbf{REC}, \mathbf{P}$ fundiert ist, also die Idealeigenschaft erhält.

Eine Modifikation des Erweiterungsfunktionsbegriffs kann nicht nur dahingehend erfolgen, daß die Längenbeschränkheit der Erweiterungen in Folge von Resourcenschranken abgeschwächt wird, sondern auch in der entgegengesetzten Richtung, also die Längenbeschränktheit noch zu verstärken. Im Extremfall, wie im Fall der Cut-and-Choose-Spiele geschehen, besteht die Erweiterung nur noch aus einem Bit.

Definition 5.6 *Eine i**-Erweiterungsfunktion** ist eine Funktion*

$$i : 2^{<\omega} \to \{0,1\}$$

Die einer i-Erweiterungsfunktion i zugeordnete Erweiterungsfunktion ist natürlich $f^i(x) = x\hat{\ }i(x)$. Das zugehörige Kategorienkonzept (im Sinne der Definitionen 5.1 und 5.5) wird als **Δ^i-Kategorie** bezeichnet.

Ambos-Spies [AS96] und Fenner [Fen95] zeigten unabhängig voneinander eine Möglichkeit auf, wie die Längenbeschränkung der Erweiterungsfunktionen gänzlich aufgehoben werden kann. Während Ambos-Spies seinen Ansatz über Bedingungsmengen verfolgte, modifizierte Fenner erneut den Begriff der Erweiterungsfunktion. Hintergrund bildete die Überlegung, daß Strategien zwar oft sehr lange Erweiterungen beschreiben (z.B. "erweitere einen String x um Ackermann($|x|$)-viele Nullen") und somit nicht polynomiell berechenbar sind, auch wenn man verschiedene Modifikationen des Erweiterungsfunktionsbegriffs zuläßt (siehe [Fen91]). Dennoch sind solche Strategien schnell und einfach *lokal* zu berechnen, da sich das n-te Bit (0, 1 oder undefiniert) einer Erweiterung innerhalb polynomialer Zeit angeben läßt. In diesem Sinne ist folgende Definition zu verstehen. ($\perp$ sei eine natürliche Zahl verschieden von 0 und 1, zwei, um genau zu sein.)

Definition 5.7 (Fenner) *Sei h eine endliche Erweiterungsfunktion und $f : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ eine totale Funktion. Die Funktion f* ***berechnet*** *h* ***lokal****, wenn für alle $x \in 2^{<\omega}$ und $n \in \omega$ gilt, daß*

$$f(\langle x, 0^n \rangle) = \begin{cases} y(n) & \textit{falls } n < |y| \\ \perp & \textit{sonst} \end{cases}$$

wobei $y \stackrel{\text{df}}{=} h(x)$. Ist hingegen f gegeben, so bezeichnet f^{LC} die Erweiterungsfunktion h. (Man beachte, daß hier wiederum String als Binärdarstellungen natürlicher Zahlen aufgefaßt werden.)

Ein LC-System ist eine Funktion $f : 2^{<\omega} \to \omega$ derart, daß für $k \geq 0$ f_k eine Erweiterungsfunktion lokal berechnet. Das Kategorienkonzept, das sich durch Verwendung von lokal berechenbaren Funktionen ergibt, heißt **Δ^{LC}-Kategorie**. In [Fen95] zeigt Fenner, daß dieses Kategorienkonzept ebenfalls für alle unter polynomieller Truth-Table-Reduzierbarkeit abgeschlossenen Funktionenklassen fundiert ist.

5.3 Resourcenbeschränkte Banach-Mazur-Spiele

Um resourcenbeschränkte Kategorie durch Banach-Mazur-Spiele zu charakterisieren, muß das klassische Spielmodell abgeändert werden. Während die Rolle von Spieler I unverändert bleibt, muß Spieler II seine Züge nun resourcenbeschränkt bestimmen, d.h. er darf nur resourcenbeschränkte Strategien wählen. Wird beim vorgegebenen Kategorienkozept eine Variante der (klassischen) Erweiterungsfunktion verwendet, so muß Spieler II eine solche, modifizierte Funktion verwenden. (Im folgenden sei das Kategorienkonzept von Mehlhorn und Lutz, das auf einfachen Erweiterungsfunktionen beruht, auch als Δ^{id}-Kategorie bezeichnet.)

Lisagor [Lis81] führte *effektive* Banach-Mazur-Spiele auf dem Baireraum ω^ω ein und beschrieb damit unabhängig von Mehlhorn ein effektives Kategorienkonzept. Lutz [Lut90] und Fenner [Fen91], [Fen95] gaben spieltheoretische Charakterisierungen ihrer resourcenbeschränkten Kategorienkonzpete.

Definition 5.8 *Sei Δ eine Funktionenklasse und d eine der oben beschriebenen Erweiterungsfunktionsvarianten* id, F, i, LC. $BM(\mathbf{C}, \Delta^d)$ *bezeichnet das* ***beschränkte Banach-Mazur-Spiel*** *für* 2^ω *mit Gewinnklasse* $\mathbf{C}$ *und Resourcenschranke Δ. In einer Partie eines resourcenbeschränkten Spiels wählt Spieler I eine echte Erweiterungsfunktion g, Spieler II jedoch eine d-Funktion h aus Δ. (Enthält Δ keine solche Funktion, so ist das Spiel nicht definiert[3].) Das Resultat $R = R(g, h)$ ist dann gemäß* (4.10) *bestimmt durch die Anfangsstücke*

$$R \restriction r_m = (h^d \circ g)^m(\lambda)$$

Satz 5.9 (Lisagor, Lutz, Fenner) *Sei* $\mathbf{C}$ *eine Teilklasse des Cantorraums, Δ eine Klassen* $\mathbf{ALL}, \mathbf{REC}, \mathbf{P}$*, d wie in Definition 5.8. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie für $BM(\mathbf{C}, \Delta^d)$.

(ii) $\mathbf{C}$ *ist Δ^d-mager.*

Beweis. Daß die Magerheit der Klasse $\mathbf{C}$ aus der Existenz einer Gewinnstrategie für Spieler II folgt, ergibt sich wie im Beweis zu Satz 4.11. Es sind nur zwei Dinge zu beachten. Erstens muß das in diesem Teil des Beweises definierte System ein d-System sein. Außerdem soll dieses d-System in der vorgegebenen Klasse Δ liegen. Beides läßt sich aber unmittelbar (4.11) entnehmen.

Die entgegengesetzte Richtung läßt sich ebenfalls übertragen. Die Definition einer Gewinnstrategie anhand eines d-Systems f, welches die Δ^d-Magerheit von $\mathbf{C}$ bezeugt, gestaltet sich folgendermaßen: Gegeben sei $x \in 2^{<\omega}$ (im Fall von $d = LC$ außerdem noch 0^j). f_k *verlangt Aufmerksamkeit für* x, falls

$$k \leq |x| \quad \text{und} \quad (\forall y \sqsubseteq x)[f_k^d(y) \not\sqsubseteq x] \tag{5.3}$$

(f_k wurde bisher noch nicht simuliert.) Bestimme den kleinsten Index k, so daß f_k für x Aufmerksamkeit verlangt und definiere

- $h(x) = f_k(x)$, falls $d = \mathrm{id}, F, i$.
- $h(x, 0^j) = f_k(x, 0^j)$, falls $d = LC$.

[3] Diese Konvention wird in den restlichen Abschnitten beibehalten und nicht mehr explizit erwähnt.

(In diesem Fall *erhält f_k Aufmerksamkeit.*) Falls kein solches k existiert, setze

- $h(x) = x\hat{}0$, falls $d = \mathrm{id}$.
- $h(x) = (0, x)$, falls $d = F$.
- $h(x) = 0$, falls $d = i$.
- $h(x, 0^j) = x(j)$ für $j < |x|$, $h(x, 0^j) = 0$ für $j = |x|$ und $h(x, 0^j) = \perp$ sonst, falls $d = LC$.

Der Nachweis, daß $h \in \Delta$ ist noch hinzuzufügen. Ist f rekursiv, so trifft dies offensichtlich auch für h zu. Sei also nun $f \in \mathbf{P}$. Um für ein gegebenes x festzustellen, welches f_k für x Aufmerksamkeit verlangt, müssen die Funktionen $f_0, \ldots, f_{|x|}$ jeweils $|x|$-mal berechnet werden, für Eingaben der Länge $\leq |x|$. Somit sind für die Bestimmung des kleinsten Index, für den die zugehörige Funktion Aufmerksamkeit verlangt, insgesamt höchstens $n^2 n^k$ $(k \in \omega)$ Operationen nötig, wenn $n = |x|$. Somit ist auch h in Polynomialzeit berechenbar. $\square$

Korollar 5.10 **$\mathbf{ALL}^i$**-*magere Klassen sind abzählbar.*

5.4 Die Kategorienkonzepte von Ambos-Spies

Die bisher beschriebenen Kategorienkonzepte basieren sämtlich auf totalen Erweiterungsfunktionen. Ambos-Spies [AS96] führte verschiedene Konzepte ein, für die dies nicht mehr der Fall ist, also auch partielle Funktionen zugelassen sind. Dadurch gelingt es unter anderem, eine größere Anzahl endlicher Erweiterungskonstruktionen zu modellieren. Einzelheiten hierzu finden sich in [AS96], unter Bezugnahme auf die Ergebnisse von Mayordomo [May94a].

Definition 5.11 *Eine partielle Erweiterungsfunktion heißt* ***dicht entlang*** *einer Menge $A \in 2^\omega$, falls für unendlich viele x gilt, daß $f(A{\upharpoonright}x)\downarrow$.*

Definition 5.12 (Ambos-Spies) *Sei f eine partielle Erweiterungsfunktion. Eine Klasse $\mathbf{C}$ heißt*

(a) ***erweitert nirgends dicht via*** *f, falls f dicht entlang jeder Menge $A \in \mathbf{C}$ ist und f von keinem $A \in \mathbf{C}$ erfüllt wird.*

(b) ***erweitert mager via*** *f, falls es ein System f von partiellen Erweiterungsfunktionen gibt, so daß für jedes $A \in \mathbf{C}$ ein Index k existiert mit der Eigenschaft, daß f_k dicht entlang A ist und von A nicht erfüllt wird.*

Proposition 5.13 *Jede erweitert nirgends dichte Klasse ist nirgends dicht. (Folglich ist jede erweitert magere Klasse mager.)*

Beweis. Zu jeder partiellen Erweiterungsfunktion f läßt sich in einfacher Weise eine totale Erweiterungsfunktion $\hat{f}$ konstruieren, so daß eine erweitert nirgends dichte Klasse **C** nirgends dicht via $\hat{f}$ ist. Hierzu setze man $\hat{f}(x) = f(y)$ für das kleinste $y \sqsupseteq x$, so daß $f(y) \downarrow$, falls solch ein String y existiert und $f(x) = x\hat{\ }0$ sonst. □

Definition 5.14 (Ambos-Spies) *Sei* Δ *eine Funktionenklasse. Eine Klasse* **C** *heißt*

(a) ***erweitert-Δ-nirgends dicht***, *falls es eine Funktion* $f \in \Delta$ *gibt, so daß* **C** *erweitert nirgends dicht via* f *ist.*

(b) ***erweitert-Δ-mager***, *falls* **C** *erweitert mager via* f *ist, für ein* $f \in \Delta$.

(c) ***erweitert-Δ-comager***, *falls* $\mathbf{C}^{\mathsf{C}}$ *erweitert-Δ-mager ist.*

In [AS96] zeigt Ambos-Spies, daß dieses Kategorienkonzept für **P** fundiert ist. Für Δ = **REC** finden sich entsprechende Beweise in [ASR97]. Hierbei ist zu beachten, daß die Funktionen, die erweiterte **REC**-Kategorie beschreiben, einen rekursiven Definitionsbereich haben.

Aus Proposition 5.13 folgt, daß im Fall Δ = **ALL** erweiterte Kategorie keine zusätzlichen mageren Objekte einführt. Es läßt sich jedoch zeigen, daß im Falle subrekursiver Funktionsklassen erhebliche Unterschiede zwischen den oben dargestellten Konzepten von Mehlhorn, Lutz und Fenner, die sämtlich auf totalen Erweiterungsfunktionen basieren, und erweiterter Kategorie bestehen (siehe [AS96]).

Für die oben beschriebenen Erweiterungsfunktionsvarianten lassen sich die entsprechenden Kategorienkonzepte analog zu Abschnitt 5.2 definieren. Δ^i-Kategorie wurde erstmals von Ambos-Spies, Fleischhack und Huwig [ASFH88] untersucht, wenn auch mehr unter dem Gesichtspunkt von Generizität und Diagonalisierungen.

Das in [AS96] als *allgemeine Kategorie* eingeführte Kategorienkonzept entspricht (in etwas abgeänderter Form) der hier als *erweiterte* Δ^F*-Kategorie* bezeichneten Variante. Das stärkste Kategorienkonzept jedoch ist die erweiterte Δ^{LC}-Kategorie, von Ambos-Spies als *erweiterte Kategorie* bezeichnet, und in [AS96] anhand partieller Bedingungsmengen beschrieben. Durch entsprechende Definitionen können jedoch auch partielle, lokal berechenbare Funktionen benutzt werden.

Definition 5.15 *Eine partielle Funktion $f : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ berechnet eine partielle Erweiterungsfunktion h lokal, falls gilt*

$$h(x)\downarrow \Rightarrow \ (\forall n)[f(\langle x, 0^n \rangle)\downarrow] \ \& \ h(x) = f^{LC}(x)$$

6 Erweiterte Banach-Mazur-Spiele

Ambos-Spies' Kategorienkonzepte verlangt von den Erweiterungsfunktionen, die die Magerheit einer Menge bezeugen, nicht mehr, daß sie an jeder Stelle eine Erweiterung spezifizieren, sprich, daß sie total sind. Es genügt, wenn die Definitionsbereiche dieser partiellen Funktionen dicht entlang bestimmter Pfade in 2^ω sind.

Für die Beschreibung dieses Kategorienkonzepts durch Banach-Mazur-Spiele ergeben sich daher gewisse Schwierigkeiten.

In den Beweisen zu Satz 4.11 wird zu einer gegebenen mageren Menge eine Gewinnstrategie konstruiert, indem die „Zeugenfunktionen" in einer *langsamen* Konstruktion nach und nach simuliert werden. Zu diesem Zweck ist es wichtig, daß eine Erweiterungsfunktion, die *Aufmerksamkeit verlangt* und die entsprechende Priorität besitzt, sofort beachtet werden kann (d.h. sie *erhält Aufmerksamkeit*), da ihr Definitionsbereich total ist.

Bei Allgemeiner und Erweiterter Kategorie ist dies nicht mehr der Fall. So kann der Fall eintreten, daß eine partielle Erweiterungsfunktion f_k von einer Eingabe x nicht erfüllt wird, (d.h. sie würde für x Aufmerksamkeit verlangen), f_k an der Stelle x jedoch nicht definiert ist. f_k kann also zu diesem Zeitpunkt keine Aufmerksamkeit erhalten. Nun könnte Spieler I seine Erweiterungen stets auf solche Stellen legen (falls unendlich viele solcher existieren), und es bestünde die Gefahr, daß eine Funktion "überspielt" würde, in dem Sinne, daß sie zwar unendlich oft entlang der Resultatsmenge definiert ist, von dieser aber nicht erfüllt wird. Dies ist genau die Situation, die - aus Sicht von Spieler II - nicht eintreten darf.

Als Lösung wird hier eine Erweiterung des klassischen Banach-Mazur-Spiels präsentiert. Neu ist hierbei die Möglichkeit für Spieler II, Züge von Spieler I (wie auch seine eigenen, im Falle der erweiterten Δ^F- Kategorie) zu kürzen, oder anschaulicher: "zurückschneiden" zu dürfen.

Um Spieler II auf diesem Wege nicht eine totale Kontrolle über das Spielgeschehen zu ermöglichen, unterliegen diese Zugkürzungen gewissen Bedingungen. So verfügt Spieler II über ein "Kürzungskapital". Wann immer er beschließt, eine Zugkürzung vorzunehmen, muß er dafür eine Münze zahlen. Akzeptiert er hingegen einen Zug in voller Länge, erhält er eine Münze hinzu. Die Entscheidung darüber, ob, und falls ja, bis zu welcher Stelle Spieler II einen Zug zurückschneidet, regelt ein sogenannter *Schnittmechanismus.* Hierbei versieht Spieler II jede mögliche Schnittstelle mit Gewichten in Form von natürlichen Zahlen. Daraufhin wählt er eine Stelle mit kleinstmöglichem Gewicht und schließt dort seine Erweiterung an. Die Intuition hinter dieser Regel ist, daß Spieler II nur dann zugunsten weniger wichtiger, sprich teurerer Anfangsstücke Züge kürzen wird, wenn er sich dies finanziell leisten kann.

6.1 Erweiterte Banach-Mazur-Spiele und Erweiterte Kategorie

Da das erweiterte Spielkonzept nur im Falle (resourcen-)beschränkter Kategorienkonzepte Anwendung findet - im klassischen Fall besteht, wie oben bemerkt, kein Unterschied, ob man nur totale Erweiterungsfunktionen verwendet oder auch partielle zuläßt - wird dieses nur für das Spielen mit Strategien beschrieben.

Definition 6.1 *Für eine Klasse* $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$*, eine Funktionenklasse* Δ *und einen Erweiterungsfunktionstyp d aus* $\{\mathrm{id}, F, i, LC\}$ *bezeichnet* $EBM(\mathbf{C}, \Delta^d)$ *das* ***erweiterte Banach-Mazur-Spiel*** *für* 2^ω *mit Gewinnklasse* $\mathbf{C}$ *und Resourcenschranke* Δ*. Eine* ***Strategie*** *für Spieler I ist eine echte Erweiterungsfunktion g. Eine Strategie für Spieler II besteht aus einem Paar* $h = (h^e, h^w) \in \Delta$*, wobei* h^e *eine (echte) d-Erweiterungsfunktion (*$h^{e,d}$ *ist die entsprechende klassische Erweiterungsfunktion) und* $h^w : 2^{<\omega} \to \omega$ *eine* (Gewichtsfunktion) *ist.*
Das ***Resultat*** $R = R(g, h)$ *einer Partie des Spiels* $EBM(\mathbf{C}, \Delta)$ *ist die induktiv durch ihre Anfangsstücke* $R\restriction r_n$ *definierte Menge* $R \in 2^\omega$*. (*$R\restriction r_n$ *gibt den Spielstand,* $c(n)$ *den Kontostand von Spieler II nach Durchführung der n-ten Spielrunde an.)*

1. *Initialisierung*

$$R\restriction r_0 = h^{e,d}(g(\lambda)) \quad \textit{und} \quad c(0) = 1$$

(Die Züge der Eröffnungsrunde können nicht gekürzt werden.)

2. *Für* $n \geq 0$ *sei* $L = \{|R\restriction r_n|, \ldots, |g(R\restriction r_n)|\}$*,*

$$R\restriction r_{n+1} = h^{e,d}(g(R\restriction r_n)\restriction l)$$

wobei l die größte Zahl in L ist, für die gilt:

- $(\forall l' \in L)[h^w(g(R\restriction r_n)\restriction l) \leq h^w(g(R\restriction r_n))\restriction l')]$
- $h^w(g(R\restriction r_n)\restriction l) < c(n)$

Existiert kein solches l, so setze $l = |g(R\restriction r_n))|$*.*
Desweiteren

$$c(n+1) = \begin{cases} c(n) - 1 & \textit{falls } l < |g(R\restriction r_n)| \\ c(n) + 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Spieler II gewinnt die Partie, falls $R(g,h) \notin \mathbf{C}$. h ist eine ***Gewinnstrategie****, wenn Spieler II mit ihr jede Partie in $EBM(\mathbf{C},\Delta)$ gewinnt, egal, welche Strategie Spieler I auch benutzt.*

Satz 6.2 *Sei $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ und $\Delta \in \{\mathbf{ALL}, \mathbf{REC}, \mathbf{P}\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie für $EBM(\mathbf{C},\Delta)$.

(ii) $\mathbf{C}$ ist erweitert-Δ-mager.

Beweis. *(i)⇒(ii).* Sei $h = (h^e, h^w)$ eine Gewinnstrategie für Spieler II für $EBM(\mathbf{C},\Delta)$. Es soll ein System $f \in \Delta$ angegeben werden, das die erweiterte-Δ-Magerheit von $\mathbf{C}$ bezeugt. Dieses System bestehe aus den folgenden Komponenten, wobei $k, l \in \omega$:

$$f_l^k(x) = \begin{cases} h^e(x) & \text{falls } |x| > l \text{ und } h^w(x) = k \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.1}$$

$$f_l^\infty(x) = \begin{cases} h^e(x) & \text{falls } |x| > l \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.2}$$

Es ist anzumerken, daß jede Funktion f_l^∞ dicht entlang jeder Menge A ist. Angenommen, es existiert ein $A \in \mathbf{C}$, das alle f_l^k, die dicht entlang A sind, sowie alle f_l^∞ erfüllt. Es soll gezeigt werden, daß dann eine Strategie g für Spieler I definiert werden kann, die einen Spielausgang $R(g,h) = A$ ergäbe, im Widerspruch zu Spieler II's Gewinnstrategie.
Man unterscheide zwei Fälle:
Fall 1: $(\exists k)\ (\overset{\infty}{\exists}\ n)\ (h^w(A\restriction n) = k)$.
Sei k_0 der kleinste solche Index. Wähle l_0 derart, daß $h^w(A \restriction n) \geq k_0$ für $n \geq l_0$. $f_l^{k_0,\delta}$ ist dicht entlang A für alle $l \geq 0$. Somit wird nach Voraussetzung jede dieser Funktionen von A erfüllt. Zu jedem $x \sqsubset A$ läßt sich also ein minimales $n = n(x)$ wählen, so daß

$$f^{k_0}_{\max(|x|,l_0)}(A\restriction n(x)) \sqsubset A \tag{6.3}$$

Hierbei gilt $x \sqsubset A\restriction n(x)$, $h^w(A\restriction n(x)) = k_0$ und $h^e(A\restriction n(x)) = f^{k_0}_{\max(|x|,l_0)}(A\restriction n(x))$. Man definiere nun g wie folgt: Für $x \sqsubset A$ sei $g(x) = A\restriction n(x)$; andernfalls sei $g(x) = x\hat{\ }0$.
Um zu beweisen, daß $R(g,h) = A$, zeigt man per Induktion nach m, daß, mit $R = R(g,h)$, $R\restriction r_m \sqsubset A$ für alle $m \geq 0$.
Für den Eröffnungzug gilt

$$R\restriction r_0 = h^e(g(\lambda)) = h^e(A\restriction n(\lambda)) = f^{k_0}_{l_0}(A\restriction n(\lambda)) \sqsubset A \tag{6.4}$$

mit $r_0 > l_0$. Sei nun $x = R \upharpoonright r_m \sqsubset A$. Dann gilt $g(R \upharpoonright r_m) = A \upharpoonright n(x)$, $h^w(A \upharpoonright n(x)) = k_0$. Da $r_m \geq r_0 > l_0$, folgt $h^w(y) \geq k_0$ für alle Strings y mit $R \upharpoonright r_m \sqsubseteq y \sqsubseteq g(R \upharpoonright r_m)$. Also kann Spieler II diesen Zug nicht kürzen, und es gilt

$$R \upharpoonright r_{m+1} = h^e(g(R \upharpoonright r_m)) = f^{k_0}_{\max(|x|,l_0)}(A \upharpoonright n(x)) \sqsubset A \tag{6.5}$$

Fall 2: sonst.
In diesem Fall existiert eine monotone Funktion $l : \omega \to \omega$ derart, daß für jedes $k \in \omega$ $l(k) > k$ und $h^w(A \upharpoonright n) > k$ für alle $n \geq l(k)$. Da die Funktionen $f_l^{\infty,\delta}$ dicht entlang jeder Menge sind, kann man zu jedem $x \sqsubset A$ ein $n(x) > |x|$ wählen, so daß

$$f^{\infty}_{l(|x|)}(A \upharpoonright n(x)) \sqsubset A \tag{6.6}$$

Definiere g durch $g(x) = A \upharpoonright n(x)$, falls $x \sqsubset A$, und $g(x) = x^0$ sonst. Wiederum zeigt man per Induktion nach m, daß für $R = R(g,h)$ $R \upharpoonright r_m \sqsubset A$. Für $m = 0$ folgt dies wie in Fall 1. Sei also $x = R \upharpoonright r_m \sqsubseteq A$ gegeben mit $r_m > l(m)$. Wiederum ist $g(x) = A \upharpoonright n(x)$. Wegen $r_m > l(m)$ gilt

$$h^w(y) > m \tag{6.7}$$

für alle y mit $x \sqsubseteq y \sqsubseteq A \upharpoonright n(x)$. Da jedoch $c(m) \leq m$, kann Spieler II diesen Zug nicht kürzen. Weiter gilt $|x| \geq r_m \geq m+1$, und somit $r_{m+1} > n(x) > l(|x|) \geq l(m+1)$ nach Definition von $n(x)$.

(ii) ⇒ (i). Sei $\mathbf{C}$ Δ-mager via f. Es soll eine Gewinnstrategie $h = (h^e, h^w)$ für Spieler II für das Spiel $EBM(\mathbf{C}, \Delta)$ gegeben werden. Zu jeder Menge $A \in \mathbf{C}$ gibt es einen Index k derart, daß f_k dicht entlang A ist, und A f_k nicht erfüllt. Somit muß sichergestellt werden, daß, falls f_k dicht entlang einem Resultat $R = R(g,h)$ einer Partie ist, es ein $n \in \omega$ gibt, für das $f_k(R \upharpoonright n) \sqsubset R$ gilt. Dies wird dadurch erreicht, daß, wenn $f_k(R \upharpoonright n)$ für unendlich viele n definiert ist, dieses f_k irgendwann im Laufe der Partie simuliert wird. Dabei wird Funktionen mit kleineren Indices höhere Priorität eingeräumt, d.h. solche Funktionen werden im Konfliktfall zuerst simuliert.

Auf diese Weise erfüllt das Resultat R jeder Partie sämtliche Funktionen f_k, die dicht entlang R sind, erfüllt. Somit kann R nicht in $\mathbf{C}$ liegen.

Es genügt bei der Konstruktion von h jedoch nicht, nach dem Muster des Beweises zu Satz 4.11 vorzugehen und , unter Berücksichtigung der Tatsache, daß nun partielle Funktionen zugelassen sind, $h^w(x) = k$ und $h^e(x) = f_k(x)$ zu setzen für den kleinsten Index k, so daß $f_k(x) \downarrow$ und $f_k(x)$ bisher noch nicht simuliert wurde (d.h. $f_k(y) \not\sqsubseteq x$ für alle $y \sqsubseteq x$ mit $f_k(y) \downarrow$). Hierbei bestünde die Gefahr, daß eine Funktion $f_{k'}$ mit $k' < k$, die zwar nicht bei x aber für ein y mit $x \sqsubset y \sqsubset f_k(x)$ definiert ist, dicht entlang R sein könnte, aber nie im Verlauf der Partie simuliert würde. Folglich muß bei der

Definition von h die Erweiterung solange kontrolliert und gegebenenfalls abgeändert werden, bis keine Gefahr des "Überspielens" mehr droht.

Definition von h: Sei ein String x gegeben. Definiere induktiv Funktionen $h_k^w(x)$ und $h_k^e(x)$ für $k = |x|+1, |x|, \ldots, 0$ und setze $h^w(x) = h_0^w(x)$ sowie $h^e(x) = h_0^w(x)$. Für $k = |x|+1$ sei $h_k^w(x) = k$ und $h_k^e(x) = x\hat{\ }0$. Sind $k \leq |x|$, $h_{k+1}^w(x)$ und $h_{k+1}^e(x)$ gegeben, so *verlangt k Aufmerksamkeit für x*, falls

$$(\forall y \sqsubseteq x)[f_k(y) \downarrow \Rightarrow f_k(y) \not\sqsubseteq x] \tag{6.8}$$

$$(\exists z)[x \sqsubseteq z \sqsubseteq h_{k+1}^e(x) \,\&\, f_k(z) \downarrow] \tag{6.9}$$

(k verlangt also im Gegesatz zum Beweis von Satz 4.11 nicht nur dann Aufmerksamkeit für x, wenn f_k an dieser Stelle definiert ist, sondern auch dann, wenn eine Stelle, an der f_k definiert ist, durch eine Folge von zulässigen Simulationen, d.h. von Funktionen $f_{k'}$ mit $k' \leq |x|$, erreicht werden kann.) Verlangt k Aufmerksamkeit für x, so wähle das kleinste z, das (6.9) erfüllt und setze $h_k^w(x) = k$ und $h_k^e(x) = f_k(z)$. Andernfalls sei $h_k^w(x) = h_{k+1}^w(x)$ und $h_k^e(x) = h_{k+1}^e(x)$. (Durch diese induktive Definition ist h eindeutig festgelegt.)

Folgendes bleibt zu zeigen: Erstens, h erfüllt die Resourcenschranke Δ und zweitens, h definiert tatsächlich eine Gewinnstrategie.

Die erste Teil folgt für $\Delta = \mathbf{REC}$ sofort, für $\Delta = \mathbf{P}$ ist dies hingegen nicht offensichtlich. Sei also f ein System von partiellen Erweiterungsfunktionen in $\mathbf{P}$. Zur Bestimmung, ob für ein k f_k Aufmerksamkeit für x verlangt, muß gemäß (6.8) f_k $|x|$-mal berechnet werden. Zudem müssen die Anfangsstücke zwischen x und $h_{k+1}^e(x)$ "durchgescannt" werden, ob f_k dort definiert ist. $h_{k+1}^e(x)$ ist gegeben durch höchstens $|x|+1-k$-malige, verkettete Anwendung einer polynomiell berechenbaren Funktion auf x. Somit ist die Länge von $h_{k+1}^e(x)$ ebenfalls polynomiell beschränkt. Da höchstens $|x|+1$ Funktionen h_k^e und h_k^w auf diese Weise definiert werden müssen, und $h = h_0$ gilt, ist h polynomiell berechenbar.

Für den zweiten Teil sei g eine beliebige Strategie für Spieler I. Es ist zu zeigen, daß $R = R(g,h) \notin \mathbf{C}$, also daß jede Funktion f_k, die dicht entlang R ist, von R erfüllt wird.

k verlangt Aufmerksamkeit in Runde $m+1$, wenn es einen String x gibt mit der Eigenschaft, daß $R \restriction r_m \sqsubseteq x \sqsubseteq g(R \restriction r_m)$ und k für x Aufmerksamkeit verlangt. *k erhält Aufmerksamkeit in Runde $m+1$*, falls es ein $x \in 2^{<\omega}$ gibt, für das k Aufmerksamkeit in Runde $m+1$ verlangt, und für das gilt:

$$R \restriction r_{m+1} = f_k(z) = h^e(x) \tag{6.10}$$

für ein $z \in 2^{<\omega}$.

Behauptung 1. Erhält k Aufmerksamkeit in Runde m, so erfüllt R f_k, und k verlangt nach Runde m nicht wieder Aufmerksamkeit.

Beweis. Offensichtlich.

Behauptung 2. Jedes k verlangt nur in endlich vielen Runden Aufmerksamkeit.

Beweis. Angenommen, es existierte ein minimaler Index k, der unendlich oft Aufmerksamkeit verlangt. Nach Behauptung 1 erhielte k niemals Aufmerksamkeit. Sei m_0 die kleinste Zahl derart, daß kein $k' < k$ nach Runde m_0 noch Aufmerksamkeit verlangt. Wähle $m_1 > m_0 + k + 1$ minimal mit der Eigenschaft, daß k in Runde m_1 Aufmerksamkeit verlangt. Man beachte, daß, wenn der Zug von Spieler I in einer Runde m bis zu einem String x mit $h^w(x) = k'$, k' in dieser Runde Aufmerksamkeit erhält. Wird in einer Runde $m > m_0$ für einen Index $k' > k$ gekürzt, dieser also Aufmerksamkeit erhält, so muß $c(m) = c(m-1) - 1 > k' - 1 \geq k$ gelten, d.h. in diesem Fall beträgt das Kapital von Spieler II nach der Kürzung immer noch mindestens $k+1$. Wird nicht gekürzt, folgt $c(m) = c(m-1)+1$. Da $m_1 > m_0 + k + 1$, hat das Kapital nach Beendigung von Runde $m_1 - 1$ mindestens den Stand $k + 1$ erreicht; folglich erhält k Aufmerksamkeit in Runde m_1, im Widerspruch zu Behauptung 1.

Behauptung 3. Ist f_k dicht entlang R, so erfüllt R f_k.

Beweis. Angenommen, f_k wäre dicht entlang R und R erfüllte f_k nicht. Gemäß Behauptung 2 kann man ein $m_0 > k$ wählen, so daß kein $k' \leq k$ nach Runde m_0 noch Aufmerksamkeit verlangt. Aufgrund der Tatsache, daß f_k dicht entlang R ist, gibt es ein $m > m_0$ derart, daß $f_k(z)\downarrow$ für ein z mit $R\restriction r_m \sqsubseteq z \sqsubset R\restriction r_{m+1}$. Da R f_k nicht erfüllt, verlangt k Aufmerksamkeit für z; außerdem muß $h^w(z) \leq k$ gelten. Andererseits existiert nach Wahl von m_0 und nach Definition der Strategie h ein Index $k' > k$ und ein String x mit $R\restriction r_m \sqsubseteq x \sqsubseteq g(R\restriction r_m)$, so daß

$$h^w(x) = h^w_{k+1} = h^w_{k'} = k' \tag{6.11}$$

und

$$R\restriction r_{m+1} = h^e(x) = h^e_{k+1}(x) = h^e_{k'}(x) \tag{6.12}$$

Da Spieler II den Zug von Spieler I bis zu dem String mit kleinstmöglichem Gewicht kürzt, folgt

$$R\restriction r_m \sqsubseteq x \sqsubseteq g(R\restriction r_m) \sqsubset z \sqsubset h^e(x) = R\restriction r_{m+1} \tag{6.13}$$

Da $h^e(x) = h^e_{k+1}(x)$, folgt nach Definition von h, daß k für x Aufmerksamkeit verlangt, und somit $h^w(x) \leq h^w_k(x) = k$ folgt, im Widerspruch zu $h^w(x) = k'$.

Dies beendet den Beweis zu Satz 6.2. □

6.2 Spiele mit Selbstkontrolle

F-Erweiterungsfunktionen schwächen die Längenbeschränkung einfacher Erweiterungsfunktionen ab. Der Nachteil, der dadurch bei der Charakterisierung der erweiterten-Δ^F-Kategorie durch erweiterte Banach-Mazur-Spiele entsteht, liegt darin, daß die Erweiterung $f^F(x)$ einer F-Erweiterungsfunktion zu lang ist, als daß sie in polynomieller Zeit (in Bezug auf x) "durchgescannt" werden könnte, wie dies im Beweis zu Satz 6.2 zur Konstruktion einer Gewinnstrategie h notwendig ist.

Für die angestrebte spieltheoretische Beschreibung bedeutet dies, daß Spieler II in der Lage sein muß, auch seine eigenen Züge gegebenenfalls zu kürzen. Im folgenden wird das Spielmodell eines erweiterten Banach-Mazur-Spiels *mit Selbstkontrolle* vorgestellt. Gegenüber dem (einfachen) erweiterten Banach-Mazur-Spiel ist hier die Zugreihenfolge umgekehrt. Spieler I macht zwar den Eröffnungszug, jede nachfolgende Runde beginnt aber damit, daß Spieler II eine Erweiterung angibt, an die Spieler I seinerseits mit seiner Erweiterung anknüpft. Danach entscheidet Spieler II anhand eines modfizierten Schnittmechanismus, an welcher Stelle die Partie in der nächsten Runde fortgesetzt werden soll, wobei diese Stelle auch seine eigene Erweiterung kürzen darf.

Bei diesem Spielmodell ist ein zusätzliches Kontrollelement vonnöten, nämlich daß, falls Spieler II eine Erweiterung kürzt, das Gewicht des Anfangsstückes, bis zu dem zurückgeschitten wird, echt kleiner sein muß als das Gewicht des Anfangsstückes, bei dem die Partie zu Beginn der Runde fortgesetzt wurde.

Definition 6.3 *Für dieselben Voraussetzungen wie in Definition 6.1 bezeichnet $EBM^S(\mathbf{C}, \Delta^d)$ das **erweiterte Banach-Mazur-Spiel mit Selbstkontrolle** für 2^ω mit Gewinnklasse $\mathbf{C}$ und Resourcenschranke Δ. Wie im Fall des erweiterten Banach-Mazur-Spiels ist eine **Strategie** für Spieler I eine echte Erweiterungsfunktion g, eine Strategie für Spieler II besteht aus einem Paar $h = (h^e, h^w) \in \Delta$, wobei h^e eine (echte) d-Erweiterungsfunktion und $h^w : 2^{<\omega} \to \omega$ eine Gewichtsfunktion ist.*
*Das **Resultat** $R = R(g, h)$ definiert sich etwas anders als in Definition 6.1:*

1. *Initialisierung*

$$R\restriction r_0 = g(\lambda) \quad \textit{und} \quad c(0) = 1$$

(Spieler I macht den Eröffnungszug, der nicht gekürzt werden kann.)

2. *Für* $n \geq 0$ *sei* $L = \{|R\restriction r_n| + 1, \ldots, |g(h^{e,F}(R\restriction r_n))|\}$,

$$R\restriction r_{n+1} = g(h^{e,d}(R\restriction r_n))\restriction l$$

wobei l *die größte Zahl in* L *ist, für die gilt:*

- $(\forall l' \in L)[h^w(g(h^{e,F}(R\restriction r_n))\restriction l) \leq h^w(g(h^{e,d}(R\restriction r_n))\restriction l')]$
- $h^w(g(h^{e,d}(R\restriction r_n))\restriction l) < h^w(R\restriction r_n)$
- $h^w(g(h^{e,d}(R\restriction r_n))\restriction l) < c(n)$

Existiert kein solches l, *so setze* $l = |h^{e,d}(g(R\restriction r_n))|$.
Desweiteren

$$c(n+1) = \begin{cases} c(n) - 1 & \textit{falls } l < |h^{e,d}(g(R\restriction r_n))| \\ c(n) + 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Spieler II gewinnt die Partie, falls $R(g,h) \notin \mathbf{C}$. h *ist eine* ***Gewinnstrategie****, wenn Spieler II mit ihr jede Partie in* $EBM^S(\mathbf{C}, \Delta)$ *gewinnt, egal, welche Strategie Spieler I auch benutzt.*

Satz 6.4 *Sei* $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$, Δ *eine Funktionenklasse. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie für $EBM^S(\mathbf{C}, \Delta^F)$.

(ii) $\mathbf{C}$ *ist* Δ^F*-mager.*

Beweis. *(i)⇒(ii).* Sei $h = (h^e, h^w)$ eine Gewinnstrategie für Spieler II für $EBM^S(\mathbf{C}, \Delta^F)$. Es soll ein F-System $f \in \Delta$ angegeben werden, das die Δ^F-Magerheit von $\mathbf{C}$ bezeugt. Dieses System bestehe aus den folgenden Komponenten, wobei $k, l \in \omega$:

$$f_l^k(x) = \begin{cases} h^e(x) & \text{falls } |x| > l \text{ und } h^w(x) = k \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.14}$$

$$f_l^\infty(x) = \begin{cases} h^e(x) & \text{falls } |x| > l \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.15}$$

Es ist anzumerken, daß jede Funktion $f_l^{\infty,F}$ dicht entlang jeder Menge A ist. Angenommen, es existiert ein $A \in \mathbf{C}$, das alle $f_l^{k,F}$, die dicht entlang A sind, sowie alle $f_l^{\infty,F}$ erfüllt. Es soll gezeigt werden, daß dann eine Strategie g für Spieler I definiert werden kann, die einen Spielausgang $R(g,h) = A$ ergibt, im Widerspruch zu Spieler II's Gewinnstrategie.

Man unterscheide zwei Fälle:

Fall 1: $(\exists k)\ (\overset{\infty}{\exists}\ n)\ (h^w(A\restriction n) = k)$.

Sei k_0 der kleinste solche Index. Wähle l_0 derart, daß $h^w(A\restriction n) \geq k_0$ für $n \geq l_0$. $f_l^{k_0,F}$ ist dicht entlang A für alle $l \geq 0$. Somit wird nach Voraussetzung jede dieser Funktionen von A erfüllt. Zu jedem $x \sqsubset A$ läßt sich also ein minimales $n = n(x)$ wählen, so daß

$$f^{k_0,F}_{\max(|x|,l_0)}(A\restriction n(x)) \sqsubset A \tag{6.16}$$

Hierbei gilt $x \sqsubset A\restriction n(x)$, $h^w(A\restriction n(x)) = k_0$ und $h^e(A\restriction n(x)) = f^{k_0}_{\max(|x|,l_0)}(A\restriction n(x))$. Man definiere nun g wie folgt: Für $x \sqsubset A$ sei $g(x) = A\restriction n(x)$; andernfalls sei $g(x) = x\hat{\ }0$.

Um zu beweisen, daß $R(g,h) = A$, zeigt man per Induktion nach m, daß, mit $R = R(g,h)$,$R\restriction r_m \sqsubset A$ für alle $m \geq 0$.

Für den Eröffnungzug gilt

$$R\restriction r_0 = g(\lambda) = A\restriction n(\lambda) \sqsubset A \tag{6.17}$$

mit $r_0 > l_0$ und außerdem

- $h^w(A\restriction n(\lambda)) = k_0$ (6.18)
- $h^{e,F}(g(\lambda)) = h^{e,F}(A\restriction n(\lambda)) = f^{k_0,F}_{l_0}(A\restriction n(\lambda)) \sqsubset A$ (6.19)

Sei nun $R\restriction r_m \sqsubset h^{e,F}(R\restriction r_m) = x \sqsubset A$. Dann ist $g(x) = A\restriction n(x)$, $h^w(A\restriction n(x)) = k_0$ und $h^{e,F}(A\restriction n(x)) \sqsubset A$. Da $r_m \geq r_0 > l_0$, folgt $h^w(A\restriction n(x)) \geq k_0$ für alle Strings y mit $R\restriction r_m \sqsubseteq y \sqsubseteq g(h^{e,F}(R\restriction r_m))$. Also kann Spieler II diesen Zug nicht kürzen, und es gilt

$$R\restriction r_{m+1} = g(h^{e,F}(R\restriction r_m)) = f^{k_0,F}_{\max(|x|,l_0)}(A\restriction n(x)) \sqsubset A \tag{6.20}$$

Fall 2: sonst.

In diesem Fall existiert eine monoton wachsende Funktion $l : \omega \to \omega$ derart, daß für jedes $k \in \omega$, $l(k) > k$ und $h^w(A\restriction n) > k$ für alle $n \geq l(k)$. Da die Funktionen $f_l^{\infty,F}$ dicht entlang jeder Menge sind, kann man zu jedem $x \sqsubset A$ ein $n(x) > |x|$ wählen, so daß

$$f^{\infty,F}_{l(|x|)}(A\restriction n(x)) \sqsubset A \tag{6.21}$$

Definiere g durch $g(x) = A\restriction n(x)$, falls $x \sqsubset A$, und $g(x) = x^0$ sonst. Wiederum zeigt man per Induktion nach m, daß, für $R = R(g,h)$, $R\restriction r_m \sqsubset A$.

Für $m = 0$ folgt dies wie in Fall 1. Sei also $R\restriction r_m \sqsubseteq h^{e,F}(R\restriction r_m) = x \sqsubset A$

gegeben mit $r_m > l(m)$. Wiederum ist $g(x) = A \upharpoonright n(x)$. Wegen $r_m > l(m)$ gilt $h^w(y) > m$ für alle y mit $R \upharpoonright r_m \sqsubseteq y \sqsubset A \upharpoonright n(x)$. Da jedoch $c(m) \leq m+1$, kann Spieler II diesen Zug nicht kürzen. Weiter gilt $|x| \geq r_m \geq m+1$, und somit

$$r_{m+1} = n(x) > l(|x|) \geq l(m+1) \tag{6.22}$$

nach Definition von $n(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $\mathbf{C}$ Δ^F-mager via f. Es soll eine Gewinnstrategie $h = (h^e, h^w)$ für Spieler II für das Spiel $EBM^S(\mathbf{C}, \Delta^F)$ gegeben werden. Wie im Beweis zu Satz 6.2 genügt es, sicherzustellen, daß jede F-Funktion f_k, die dicht entlang eines Resultats $R(g,h)$, im Laufe der Partie simuliert wird, daß also $R(g,h)$ f_k^F erfüllt.

Definition von h:
Sei ein String x gegeben. *k verlangt Aufmerksamkeit für x*, falls

- $k \leq |x|$
- $f_k(x) \downarrow$
- $(\forall y \sqsubseteq x)[f_k(y) \downarrow \rightarrow f_k^F(y) \not\sqsubseteq x]$

Wähle das kleinste k, das für x Aufmerksamkeit verlangt und setze $h^e(x) = f_k(x)$ (*k erhält Aufmerksamkeit*). Existiert kein solches k, so definiert man $h^e(x) = (x, 0)$.

Ein Argument wie im Beweis zu Satz 5.9 zeigt, daß die Funktionen h^e und h^w die Zeitschranke $\mathbf{P}$ erfüllen.

Es ist zu zeigen, daß diese Funktionen tatsächlich eine Gewinnstrategie für Spieler II definieren. Sei zu diesem Zweck g eine beliebige Strategie für Spieler I.
Ein Index *k verlangt Aufmerksamkeit in Runde $m+1$*, falls es einen String x gibt mit der Eigenschaft, daß

$$R \upharpoonright r_m \sqsubseteq x \sqsubseteq g(h^{e,F}(R \upharpoonright r_m)) \tag{6.23}$$

und k für x verlangt. *k erhält Aufmerksamkeit in Runde $m+1$*, falls es ein x gibt, für das k in Runde $m+1$ Aufmerksamkeit verlangt, und für das gilt:

$$R \upharpoonright r_{m+1} = g(h^{e,F}(R \upharpoonright r_m)) \upharpoonright l = x \tag{6.24}$$

Behauptung 1. Jedes k verlangt nur in endlich vielen Runden Aufmerksamkeit.

Beweis. Angenommen, es existiert ein minimaler Index k, der in unendlich vielen Runden Aufmerksamkeit verlangt. Dann gibt es eine Runde m_0, ab der nur noch Gewichte $k' \geq k$ Aufmerksamkeit verlangen. Wähle $m_1 > m_0 + k + 1$ minimal mit der Eigenschaft, daß k in Runde m_1 Aufmerksamkeit verlangt. Eine Argumentation wie im Beweis zu Satz 6.2 zeigt, daß $c(m_1 - 1) \geq k + 1$. Folglich erhält k_0 Aufmerksamkeit in Runde m_1. Da in der nachfolgenden Runde nur noch Gewichte $k' \geq k$ Aufmerksamkeit verlangen, wird nach Definition von $R \restriction r_{m_1}$ die Erweiterung h^e nicht gekürzt. Somit erfüllt R f_k. Nach Definition von h verlangt nachfolgend f_k nie wieder Aufmerksamkeit - Widerspruch!

Behauptung 2. Ist f_k dicht entlang R, so erfüllt R f_k.

Beweis. Angenommen, f_k ist dicht entlang R und R erfüllt f_k nicht. Gemäß Behauptung 2 kann man ein m_0 wählen, so daß kein $k' < k$ nach Runde m_0 noch Aufmerksamkeit verlangt. Aufgrund der Tatsache, daß f_k dicht entlang R ist, gibt es ein $m_1 > m_0 + k + 1$ derart, daß $f_k(z) \downarrow$ für ein z mit $R \restriction r_m \sqsubset z \sqsubset g(h^{e,F}(R \restriction r_m))$. Da R f_k nicht erfüllt, verlangt k Aufmerksamkeit für z; außerdem muß $h^w(y) \geq k$ sein für alle y mit $R \restriction r_m \sqsubset z \sqsubset g(h^{e,F}(R \restriction r_m))$. Eine Argumentation wie im Beweis zu Satz 6.2 zeigt, daß Spieler II den Schnitt $R \restriction r_{m+1} = z$ bezahlen kann. Im nächsten Zug wird folglich f_k simuliert, und diese Erweiterung kann nicht gekürzt werden - Widerspruch.

Dies schließt den Beweis zu Satz 6.4 ab. □

Erweiterte Δ^{LC}-Kategorie

Hinsichtlich der Darstellung durch erweiterte Banach-Mazur-Spiele tritt bei der erweiterten Δ^{LC}-Kategorie ein Problem auf. Wie in Abschnitt 5 bemerkt wurde, umgeht das Konzept der lokalen Berechenbarkeit die Längenbeschränktheit von Erweiterungsfunktionen in Folge von Resourcenschranken. Dieses Konzept eignet sich jedoch nur für Erweiterungsfunktionen. Nun besteht in einem erweiterten Spiel eine Strategie für Spieler II neben einer Erweiterungsfunktion (bzw. der entsprechenden Variante) auch aus einer Bewertungsfunktion h^w. Diese muß im ursprünglichen Modell (Abschnitt 6.1) ebenfalls der Resourcenschranke Δ unterliegen. Im Beweis zu Satz 6.2 zeigt sich, daß bei der Bestimmung von $h^w(x)$ die gesamte Erweiterung $h^e(x)$ bekannt sein muß. Besitzt letztere aber durch Ausnutzung der lokalen Berechenbarkeit keine Längenbeschränkung, so ist es nicht möglich, diese Funktion in irgendeiner Zeitschranke zu berechnen.

Hier bieten sich zwei Lösungsmöglichkeiten an:

1. Man verwendet zur Charakterisierung der erweiterten Δ^{LC}-Kategorie Spiele mit Selbstkontrolle. Diese definieren sich analog zu Definiti-

on 6.3, man muß lediglich das Konzept der F-Erweiterungsfunktion durch das Konzept der lokalen Berechenbarkeit der Strategien ersetzen. Auch der Beweis des Satz 6.4 entsprechenden Resultates läuft, unter Berücksichtigung des Beweises zu Satz 5.9, analog. Auf diese Weise erfüllt auch die Funktion h^w ohne Probleme die Resourcenschranke Δ. Jedoch wird bei diesem Ansatz von den Möglichkeiten der lokalen Berechenbarkeit keinen Gebrauch gemacht. (Die im Beweis zu Satz 6.2 auftretende Konstruktion einer Gewinnstrategie $h = (h^e, h^w)$ könnte, was den Teil h^e betrifft, bei gegebenem LC-System f in $\mathbf{P}$ lokal in polynomieller Zeit berechnet werden.)

2. Man ändert das erweiterte Spielmodell dahingehend ab, daß, bei der Definition einer Strategie für Spieler II für eine subrekursive Resourcenschranke Δ, von der Gewichtsfunktion h^w nur noch verlangt wird, daß diese rekursiv sei. Da aber in die Definition des Systems f_l^k im Beweis zu Satz 6.2 auch die Funktion h^w eingeht, kann die postulierte Äquivalenz in diesem Fall nicht mehr analog zu Satz 6.2 bewiesen werden. Man kann aus der Existenz einer Gewinnstrategie für Spieler II für das Spiel $EBM(\mathbf{C}, \mathbf{P})$ dann lediglich die erweiterte $\mathbf{REC}^{LC}$-Magerheit von $\mathbf{C}$ folgern.

6.3 Erweiterte Cut-and-Choose-Spiele

Erweiterte Cut-and-Choose-Spiele bilden das einfachste Mitglied in der Familie der hier behandelten erweiterten topologischen Spiele. Zur Charakterisierung der erweiterten Δ^i-Kategorie benötigen sie weder eine Selbstkontrolle wie im Fall der erweiterten Δ^F-Kategorie, noch ist wie im Beweis zu Satz 6.2 eine aufwendige Konstruktion der Strategie h vonnöten.

Definition 6.5 *Für eine Klasse $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ und eine Funktionenklasse Δ bezeichnet $ECC(\mathbf{C}, \Delta^d)$ das **erweiterte Cut-and-Choose-Spiel** für 2^ω mit Gewinnklasse $\mathbf{C}$ und Resourcenschranke Δ. Eine **Strategie** für Spieler I ist eine echte Erweitrungsfunktion g. Eine Strategie für Spieler II besteht aus einem Paar $h = (h^e, h^w) \in \Delta$, wobei h^e eine i-Erweiterungsfunktion und $h^w : 2^{<\omega} \to \omega$ eine Gewichtsfunktion ist.*
*Das **Resultat** $R = R(g, h)$ einer Partie des Spiels $ECC(\mathbf{C}, \Delta)$ ist wie in Definition 6.1 induktiv durch die Anfangsstücke $R \upharpoonright r_n$ definiert, zusammen mit dem Kontostand $c(n)$.*

1. *Initialisierung*

$$R \upharpoonright r_0 = g(\lambda)\hat{\ } h^e(g(\lambda)) \quad und \quad c(0) = 1$$

(Die Züge der Eröffnungsrunde können nicht gekürzt werden.)

2. *Für* $n \geq 0$ *sei* $L = \{|R\restriction r_n|, \ldots, |g(R\restriction r_n)|\}$,

$$R\restriction r_{n+1} = g(R\restriction r_n)\restriction l\,\hat{}\,h^e(g(R\restriction r_n))$$

wobei l *die größte Zahl in* L *ist, für die gilt:*

- $(\forall l' \in L)[h^w(g(R\restriction r_n)\restriction l) \leq h^w(g(R\restriction r_n))\restriction l')]$
- $h^w(g(R\restriction r_n)\restriction l) < c(n)$

Existiert kein solches l, *so setze* $l = |g(R\restriction r_n))|$.
Desweiteren

$$c(n+1) = \begin{cases} c(n) - 1 & \text{falls } l < |g(R\restriction r_n)| \\ c(n) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Spieler II gewinnt die Partie, falls $R(g,h) \notin \mathbf{C}$.

Der zugehörige Satz lautet dann:

Satz 6.6 *Sei* $\mathbf{C} \subseteq 2^\omega$ *und* $\Delta \in \{\mathbf{ALL}, \mathbf{REC}, \mathbf{P}\}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie für $EBM(\mathbf{C}, \Delta^i)$.

(ii) $\mathbf{C}$ *ist erweitert* Δ^i*-mager.*

Der Beweis läuft völlig analog zum Beweis von Satz 6.2, nur daß, wie oben angedeutet, bei der Konstruktion einer Gewinnstrategie h anhand einer erweitert Δ^i-mageren Klasse auf die aufwendige, induktive Definition verzichtet werden und statt dessen eine Konstruktion wie im Beweis zu Satz 6.4 benutzt werden kann.

7 Abschließende Betrachtungen

Das im vorausgegangenen Abschnitt vorgestellte erweiterte Spielmodell läßt sicherlich die Einfachheit und Eleganz des klassischen Banach-Mazur-Spiels vermissen. Zu groß ist die Anzahl der Änderungen, zu komplex die neue Definition eines Partieverlaufs. Dies ist der Preis, der dafür zu zahlen ist, daß ein Kategorienkozept, welches auf partiellen Erweiterungsfunktionen basiert, durch totale Strategien beschrieben wird.

Generell ist anzumerken, daß das erweiterte Banach-Mazur-Spiel viel von der ursprünglichen Eigenschaft des topologischen Spieles eingebüßt hat, in dem Sinne, daß topologische Objekte zur Charakterisierung topologischer Eigenschaften gespielt werden. Statt dessen kommen Elemente hinzu, die aus der Rekursions- oder Komplexitätstheorie bekannt sind, wie z.B. die Gewichtung von Zügen oder Zugrücknahmen in Folge von Prioritätskonflikten. Dies ist auch nicht verwunderlich, dienen erweiterte Banach-Mazur-Spiele doch hauptsächlich der Beschreibung resourcenbeschränkter Kategorienkonzepte. So ähnelt der Partieverlauf eines erweiterten Banach-Mazur-Spiels der Konstruktion einer erweitert generischen Menge, wie sie in [AS96] zu finden ist.

Dennoch sind in der Definition des erweiterten Spielmodells einige Strukturen zu finden, die auch im wichtigsten Anwendungsfeld der topologischen Spiele, der deskriptiven Mengenlehre verwendet werden.

Eine solche Struktur ist das *Entfalten.* In einem *entfalteten Banach-Mazur-Spiel* etwa spielt Spieler II neben einer offenen Menge in jedem Zug zusätzlich eine natürliche Zahl i_n. Als Resultat ergibt sich neben dem unendlichen Durchschnitt V von offenen Mengen auch eine Folge $i = (i_n)_{n\in\omega}$ von natürlichen Zahlen. Die Gewinnbedingung einer entfalteten Partie ist dahingehend abgeändert, daß das Paar (V, i) in einer vorgegebenen Menge $F \subseteq X \times \omega^\omega$ enthalten ist. Offensichtlich folgt aus der Existenz einer Gewinnstrategie für Spieler II für das entfaltete Banach-Mazur-Spiel die Magerheit der Menge $A = \mathrm{proj}_X(F)$. Die umgekehrte Richtung gilt natürlich nicht mehr.

Auch im Fall erweiterter Banach-Mazur-Spiele tritt eine Art Entfaltung auf, in Form der Vergabe von Gewichten an jedes Anfangsstück in $2^{<\omega}$. Durch den Schnittmechanismus wird diese Art von entfaltetem Spiel so modifiziert, daß beide Richtungen der Äquivalenz im Hauptresultat über Banach-Mazur-Spiele gelten.

Literatur

[AS96] K. Ambos-Spies. Resource-bounded genericity. In S. B. Cooper et al., editor, *Computability, Enumerability, Unsolvability*, number 224 in London Mathematical Society Lecture Notes Series, pages 1–59. Cambridge University Press, 1996.

[ASFH88] K. Ambos-Spies, H. Fleischhack, and H. Huwig. Diagonalizing over deterministic polynomial time. Forschungsbericht 1/88, Universität Oldenburg, 1988.

[ASR97] K. Ambos-Spies and J. Reimann. Effective baire category concepts. Forschungsbericht Mathematische Logik 28, Universität Heidelberg, 1997.

[Bai99] R. Baire. Sur les fonctions de variables reelles. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 3:1–122, 1899.

[BDG95] J. L. Balcázar, J. Díaz, and J. Gabarró. *Structural Complexity I*, volume 11 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer, Berlin Heidelberg, second edition, 1995.

[Ber75] C. Berge. Topological games with perfect information. *Annals of Mathematical Studies*, 39:165–178, 1975.

[Can83] G. Cantor. über unendliche lineare punktmannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 21:545–586, 1883.

[Dav64] M. Davis. Infinite games of perfect information. *Annals of Mathematical Studies*, 52:85–101, 1964.

[Fen91] S. A. Fenner. Notions of resource-bounded category and genericity. In *Proc. 6th Structure in Complexity Theory Conference*, pages 196–212. IEEE Computer Society Press, 1991.

[Fen95] S. A. Fenner. Resource-bounded baire category: A stronger approach. In *Proc. 10th Structure in Complexity Theory Conference*, pages 182–192. IEEE Computer Society Press, 1995.

[GS53] D. Gale and F. M. Stewart. Infinite games of perfect information. *Annals of Mathematical Studies*, 28:245–266, 1953.

[Joc85] C. G. Jockusch. Genericity for recursively enumerable sets. In *Recursion Theory Week*, Lecture Notes in Mathematics, pages 203–232, Berlin Heidelberg, 1985. Springer.

[Kec95] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York Berlin Heidelberg, 1995.

[Leb04] H. Lebesgue. *Lecons sur l'intégration*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[Lis81] R. L. Lisagor. The banach-mazur game. *Math. USSR Sbornik*, 38:201–216, 1981.

[Lut90] J. H. Lutz. Category and measure in complexity classes. *SIAM Journal of Computing*, 19:1100–1131, 1990.

[Mau81] R. D. Mauldin. *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*. Birkhauser, 1981.

[May94a] E. Mayordomo. Almost every set in exponential time is p-bi-immune. *Theoretical Computer Science*, 136:487–506, 1994.

[May94b] E. Mayordomo. *Contributions to the Study of Resource-bounded Measure*. PhD thesis, Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, 1994.

[Meh73] K. Mehlhorn. On the size of sets of computable functions. In *Proceedings of the 14th IEEE Symposium on Switching and Automata Theory*, pages 190–196, Berlin, New York, 1973. IEEE, Springer-Verlag.

[Odi89] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory*. North-Holland, 1989.

[Oxt57] J. C. Oxtoby. The banach-mazur game and banach category theorem. *Annals of Mathematical Studies*, 39:159–163, 1957.

[Oxt80] J. C. Oxtoby. *Measure and Category*, volume 2 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York Berlin Heidelberg, 1980.

[Soa87] R. I. Soare. *Recursively Enumerable Sets and Degrees*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin Heidelberg, 1987.

[Tel87] R. Telársky. Topological games: On the 50th anniversary of the banach-mazur game. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 17:227–276, 1987.

[vNM44] J. von Neuman and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. McGraw Hill, 1944.

[Zer12] E. Zermelo. über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. In *Proceedings of the fifth Congress of Mathematics*, page 501, Cambridge, 1912.